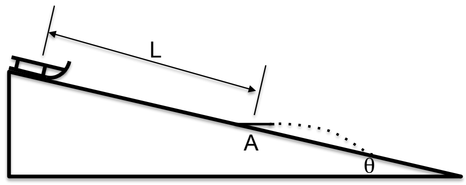
# Fisica Generale 1 per Ing. Gestionale e Chimica (Prof. F. Forti)

A.A. 2011/12 Appello del 9/01/2013.

- Tempo a disposizione: 2h30. Scrivere solamente su fogli forniti
- Modalità di risposta: spiegare sempre il procedimento seguito. Calcolare il valore numerico quando richiesto. Valore di ciascun quesito: 4 punti. Non ci sono penalità per le risposte errate. 3 punti di bonus per la chiarezza espositiva.
- Durante la prova scritta è consentito usare solo il formulario personale, strumenti di disegno e scrittura, calcolatrice: non è possibile utilizzare eserciziari o appunti. Il candidato dovrà restituire tutta la carta fornita dagli esaminatori: non è consentito utilizzare fogli di carta propri per svolgere l'elaborato.
- Si assumano i seguenti valori per le costanti che compaiono nei problemi: $g = 9.81\ ms^{-2}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg \cdot s)}$ $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$, $M_T = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 8.31\,\mathrm{J/mol \cdot K}$.

**Problema 1**:
Un piccolo slittino di massa $M = 5.0\,\mathrm{kg}$ si trova su una pista innevata che forma un angolo $\theta = 10°$ rispetto all'orizzontale. I coefficienti di attrito statico e dinamico sono rispettivamente $\mu_S = 0.2$ e $\mu_D = 0.1$.

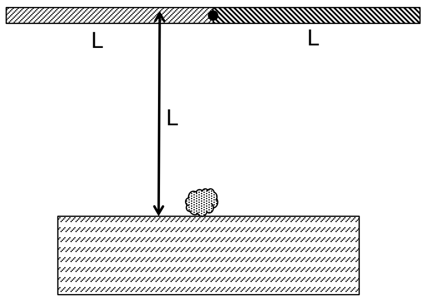



**Quesito 1.1** Inizialmente lo slittino è fermo sul pendio. Dimostrare che questa situazione è compatibile con i dati numerici del problema, e calcolare la forza di attrito che agisce sullo slittino in situazione di equilibrio.

**Quesito 1.2** Successivamente, a causa di una folata di vento, lo slittino si mette in movimento, inizialmente con velocità trascurabile. Calcolare la velocità dello slittino nel punto $A$, dopo che ha percorso un tratto $L = 300\,\mathrm{m}$ lungo il pendio.

**Quesito 1.3** Nel punto $A$ del pendio è installato un trampolino orizzontale di lunghezza trascurabile, su cui lo slittino salta. Calcolare a che distanza dal punto $A$ lo slittino atterra di nuovo sul pendio.

**Problema 2**:
Due sbarrette sottili ed omogenee, di lunghezza $L = 20\,\mathrm{cm}$ ciascuna, ed uguale sezione, sono collegate rigidamente insieme in modo da formare una unica sbarra di lunghezza $2L$. Le due sbarrette sono di legno e alluminio, con la densità dell'alluminio pari a 3 volte quella del legno: $\rho_A = 3\rho_L$. La sbarra è incernierata ad un asse orizzontale senza attrito perpendicolare ad essa e passante per il suo centro geometrico e viene rilasciata da ferma a partire dalla posizione orizzontale. (Si ricordi che il momento di inerzia di una sbarretta sottile rispetto ad un asse passante per un estremo è $ML^2/3$)




**Quesito 2.1** Calcolare l'accelerazione angolare $\alpha$ della sbarra quando viene rilasciata.

**Quesito 2.2** Calcolare la velocità angolare $\omega$della sbarra quando passa per la posizione verticale.

**Quesito 2.3** Nel momento in cui passa per la posizione verticale, la sbarra urta contro una pallina di plastilina appoggiata su di un tavolo posto a distanza $L$ sotto l'asse di rotazione. Nell'urto, che avviene in un tempo trascurabile, la pallina, di massa pari alla massa della sbarretta di legno, rimane attaccata all'estremo della sbarra. Determinare la velocità angolare $\omega'$ del sistema sbarra/plastilina subito dopo l'urto.

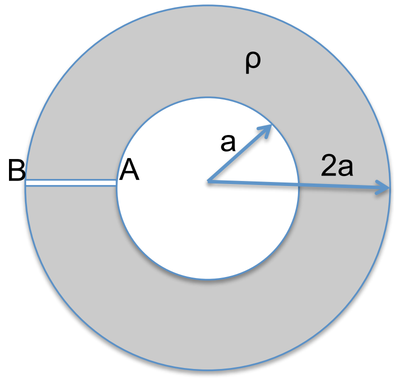
**Problema 3**:
Il MI cantino di una chitarra acustica è costituito da una corda di acciaio, che ha densità $\rho = 7860\,\mathrm{kg/m^3}$, di diametro $d = 0.010\,\mathrm{in}$ (si ricordi che $1\,\mathrm{in} = 2.54\,\mathrm{cm}$. La corda è sottoposta ad una tensione $T = 50\,\mathrm{N}$.

**Quesito 3.1** Calcolare la velocità $v$ delle onde trasversali lungo la corda.

**Quesito 3.2** Determinare la lunghezza che deve avere la corda per produrre come suono fondamentale il $\mathrm{MI}_4$ con frequenza $f = 329\,\mathrm{Hz}$

**Quesito 3.3** Se la corda vibra nel modo fondamentale con una semi-ampiezza $A = 1.0\,\mathrm{mm}$ determinare l'energia totale immagazzinata nella corda.

**Solo per il corso di Fisica Generale (509)**




**Problema 4**:
La regione di spazio compresa tra due sfere di raggio $a = 5.0\,\mathrm{cm}$ e raggio $2a$ è riempita di un materiale isolante con una densità di carica $\rho = 3.5\,\mathrm{nC/m^3}$. Nel materiale è praticato un foro di raggio trascurabile in direzione radiale. Si chiami A l'estremità del foro a raggio $a$ e B quella a raggio $2a$, come mostrato in figura.

**Quesito 4.1** Calcolare il campo elettrico nella regione $r < a$ e nella regione $a < r < 2a$, valutando numericamente il suo valore nel punto B

**Quesito 4.2** Calcolare la differenza di potenziale tra A e B.

**Quesito 4.3** Un positrone (carica $e = +1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, massa $m_e = 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$) viene lanciato dal centro delle sfere verso il foro. Calcolare la velocità con cui deve essere lanciato perchè arrivi fino al punto B.

# Soluzioni

**Problema 1**:

**Quesito 1.1** La condizione di equilibrio delle forze sullo slittino si può scomporre lungo gli assi paralleli ed ortogonali al piano inclinato, con l'asse diretto verso il basso e la forza di attrito diretta verso l'alto:

$$\begin{aligned} Mg\sin\theta - F_a &= 0 \quad (1)\\ N - Mg\cos\theta &= 0 \quad (2)\end{aligned}$$

da cui si ottiene che $F_a = Mg\sin\theta = 8.52\,\mathrm{N}$. Perchè lo slittino sia effettivamente in equilibrio bisogna che sia $F_a \leq \mu_S N = \mu_S Mg\cos\theta$ da cui $\mu_s \geq \tan\theta = 0.176$. Poichè tale condizione è effettivamente verifcata da $\mu_S = 0.2$ lo slittino può stare in equilibrio.

**Quesito 1.2** Quando lo slittino si mette in movimento, la forza di attrito in gioco è quella dinamica, che è inferiore alla massima forza di attrito statico. L'accelerazione sarà data da (notare che è positiva quindi il corpo effettivamente scende):

$$a = g(\sin\theta - \mu_D\cos\theta) = 0.737\,\mathrm{m/s^2} \quad (3)$$

da cui si vede che si tratta di un moto uniformemente accelerato per cui la velocità al punto $A$ è data da:

$$v_A = \sqrt{2aL} = \sqrt{2gL(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)} = 21.0\,\mathrm{m/s^2} \quad (4)$$

**Quesito 1.3** Poiché il trampolino ha lunghezza trascurabile non altera il modulo della velocità dello slittino nel punto $A$, ma semplicemente ne varia la direzione in modo da essere orizzontale. Considerato un sistema $xy$ con l'asse $x$ orizzontale e l'asse $y$ verticale con origine nel punto $A$, la legge oraria del moto dello slittino una volta che lascia il trampolino è:

$$x(t) = v_A t\ ;\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (5)$$

Questa parabola va interesecata con l'equazione del piano inclinato $y = -(\tan\theta)x$, da cui:

$$-\frac{y}{x} = \tan\theta = \frac{gt}{2v_A} = \frac{gx}{2v_A^2} \implies x = \frac{2v_A^2\tan\theta}{g} \quad (6)$$

dove si è ricavato $t$ in funzione di $x$ dalla legge oraria. La distanza dal punto $A$ è:

$$D = \frac{x}{\cos\theta} = \frac{2v_A^2\sin\theta}{g\cos^2\theta} = 4L\tan\theta(\tan\theta - \mu_D) = 16.1\,\mathrm{m} \quad (7)$$

**Problema 2**:

Chiamiamo $M_1$ ed $M_2$ le masse delle sbarrette di legno ed alluminio, rispettivamente. Vista la relazione tra le densità si ha che $M_2 = 3M_1$, visto che le due sbarrette hanno uguale volume.

**Quesito 2.1** Il momento di inerzia della sbarra rispetto alla cerniera $O$ è la somma dei momenti di inerzia delle singole sbarrette, entrambe incernierate alla propria estremità:

$$I_O = I_1 + I_2 = \frac{1}{3}M_1L^2 + \frac{1}{3}M_2L^2 = \frac{1}{3}(M_1+M_2)L^2. \quad (8)$$

Considerando i momenti delle due forze peso rispetto alla cerniera $O$ e scrivendo la seconda equazione cardinale $\tau = I\alpha$ si ottiene

$$M_2g\frac{L}{2} - M_1g\frac{L}{2} = \frac{1}{3}(M_1+M_2)L^2\alpha \implies \alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\frac{M_2-M_1}{M_2+M_1} = \frac{3}{4}\frac{g}{L} = 36.8\,\mathrm{rad/s^2} \quad (9)$$

**Quesito 2.2** Nel moto della sbarretta si conserva l'energia in quanto la forza di gravità è conservativa e non ci sono attriti. Considerando lo zero dell'energia potenziale nell'asse di rotazione e considerando che il centro di massa della sbarretta di legno sale, mentre quello della sbarretta di alluminio scende, si ottiene:

$$0 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(M_1+M_2)L^2\right]\omega^2 + (M_2-M_1)g\frac{L}{2} \implies \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}\frac{M_2-M_1}{M_2+M_1}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}} = 8.58\,\mathrm{rad/s} \quad (10)$$

**Quesito 2.3** Nell'urto inelastico non si conserva la quantità di moto in quanto la reazione della cerniera è una forza impulsiva esterna. Tale forza ha tuttavia momento nullo rispetto ad $O$ e si conserva quindi il momento angolare del sistema. Utilizzando l'espressione per il momento angolare di un corpo rigido $J = I\omega$, e tenendo conto del momento di inerzia della pallina di plastilina dopo che è rimasta attaccata alla sbarra si ottiene:

$$\frac{1}{3}(M_1+M_2)L^2\omega = \left[\frac{1}{3}(M_1+M_2)L^2 + M_1L^2\right]\omega' \implies \omega' = \omega\frac{M_1+M_2}{4M_1+M_2} = \frac{4}{7}\omega = 4.90\,\mathrm{rad/s} \quad (11)$$

**Problema 3**:

**Quesito 3.1** La velocità delle onde trasversali su una corda è data da $v = \sqrt{T/\mu}$ dove $T$ è la tensione della corda e $\mu$ è la densità lineare di massa. Nel nostro caso la sezione della corda è $S = \pi(d/2)^2 = 5.07 \times 10^{-8} m^2$, che corrisponde ad una densità lineare $\mu = \rho S = 398 \times 10^{-6}$ kg/m. La velocità è quindi $v = \sqrt{T/\mu} = 354\,\mathrm{m/s}$

**Quesito 3.2** Le oscillazioni trasversali stazionarie della corda sono date da

$$y = A\sin(kx)\sin(\omega t), \tag{12}$$

dove $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda e $\omega = 2\pi f$ la pulsazione. Se la corda ha lunghezza $L$ deve essere $\sin(kL) = 0$ che per il modo fondamentale corrisponde a $kL = \pi$ da cui $L = \pi/k = \lambda/2$. La lunghezza d'onda si può ottenere dalle relazioni

$$v = \omega/k = \lambda f \tag{13}$$

$\omega/k = \lambda f = v$. Si ottiene $L = v/2f = 53.8\,\mathrm{cm}$

**Quesito 3.3** Ogni elemento $dx$ della corda si comporta come una piccola massa $dm = \mu dx$ collegata ad una molla. L'energia sarà quindi

$$dE = \frac{1}{2}(dm)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(dm)\omega^2 y^2 \tag{14}$$

dove $(dm)\omega^2$ è la costante elastica della molla. Dall'espressione 12 si ottiene

$$\dot{y} = A\omega\sin(kx)\cos(\omega t) \implies dE = \frac{1}{2}(dm)A^2\omega^2\sin^2(kx) \tag{15}$$

L'energia totale sarà quindi

$$E = \int_0^L \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\sin^2(kx)dx = \frac{A^2\mu\omega^2}{2k}\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}A^2\pi^2\mu v f = 228 \times 10^{-6}\,\mathrm{J}, \tag{16}$$

dove si è fatto uso delle relazioni 13 e dell'integrale:

$$\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1 - cos2\theta}{2}d\theta = \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

**Solo per il corso di Fisica Generale (509)**

**Problema 4**:

**Quesito 4.1** Il campo puó essere calcolato usando il teorema di Gauss ovvero

$$\Phi(E(r)) = q(r)/\epsilon_0 \tag{18}$$

si ha quindi che nella regione interna il campo, $r \leq a$ é nullo, mentre per $a < r \leq 2a$ si ha

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{1}{\epsilon_0}(r^3 - a^3) \tag{19}$$

da cui

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(r - \frac{a^3}{r^2}) \tag{20}$$

che nel punto B vale

$$E(B) = \frac{7}{4}\frac{\rho a}{3\epsilon_0} \tag{21}$$

ovvero $E(B) = 11.5$ V/m.

**Quesito 4.2** Per calcolare la differenza di potenziale usiamo l'equazione

$$V_B - V_A = -\int_A^B E(r)dr \tag{22}$$

da cui esplicitando l'integrazione si ha

$$\Delta V = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}(\frac{1}{2}r^2 + \frac{a^3}{r})|_a^{2a} \tag{23}$$

ovvero, riordinando,

$$\Delta V = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}a^2 \tag{24}$$

cioé $\Delta V = -0.33$ V.

**Quesito 4.3** Per fare in modo che il positrone riesca ad arrivare nel punto B é necessario che la sua energia cinetica sia maggiore dell'energia potenziale che avrá in $B$. La differenza di potenziale fra il centro ed $A$ é nulla perché $E(r) = 0$ per $r < a$, deve quindi valere

$$\frac{1}{2}m_e v_e^2 \geq |e\Delta V| \tag{25}$$

quindi $v_e \geq 3.4 \times 10^5$ m/s.