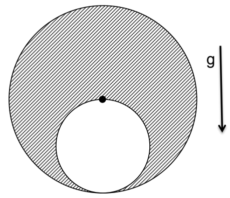
Fisica Generale 1 per Ing. Gestionale e Chimica (Prof. F. Forti)

A.A. 2011/12 Appello del 29/01/2013.

- Tempo a disposizione: 2h30. Scrivere solamente su fogli forniti
- Modalità di risposta: spiegare sempre il procedimento seguito. Calcolare il valore numerico quando richiesto. Valore di ciascun quesito: 4 punti. Non ci sono penalità per le risposte errate. 3 punti di bonus per la chiarezza espositiva.
- Durante la prova scritta è consentito usare solo il formulario personale, strumenti di disegno e scrittura, calcolatrice: non è possibile utilizzare eserciziari o appunti. Il candidato dovrà restituire tutta la carta fornita dagli esaminatori: non è consentito utilizzare fogli di carta propri per svolgere l'elaborato.
- Si assumano i seguenti valori per le costanti che compaiono nei problemi: $g = 9.81\ ms^{-2}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg \cdot s)}$ $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$, $M_T = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 8.31\,\mathrm{J/mol \cdot K}$.



Problema 1:
Un cilindro omogeneo di raggio $R = 20\,\mathrm{cm}$ viene forato parallelamente al proprio asse con un foro di diametro R e centrato a distanza $R/2$ dall'asse. La massa del cilindro forato è $M = 15\,\mathrm{kg}$.

Quesito 1.1 Calcolare la distanza d_{CM} del centro di massa dall'asse del cilindro.

Quesito 1.2 L'asse del cilindro viene collegato ad un motore con asse orizzontale e messo in rotazione con velocità angolare costante compiendo 300 rpm (cioè giri al minuto). Calcolare le componenti orizzontale(F_x) e verticale(F_y) della forza esercitata dal cilindro sull'asse del motore quando il centro di massa si trova sulla verticale dell'asse stesso (vedi figura).

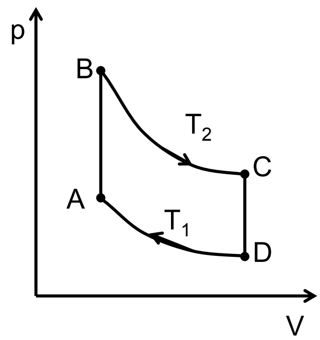
Quesito 1.3 Calcolare la potenza massima fornita dal motore per mantenere il cilindro in rotazione a velocità angolare costante.

Problema 2:
Un satellite si trova su un orbita circolare intorno alla terra (che si puó considerare ferma) ad una quota dalla superficie terrestre pari a $h = 30000\,\mathrm{km}$.

Quesito 2.1 Calcolare la velocità v del satellite.

Quesito 2.2 Ad un certo istante il satellite esplode in due frammenti di uguale massa che viaggiano nella stessa direzione della velocità del satellite intero, tangente all'orbita. Si osserva che il rapporto tra l'energia cinetica totale dei due frammenti e l'energia cinetica del satellite intero prima dello scoppio vale $\alpha = K_{\mathrm{fin}}/K_{\mathrm{in}} = 5$. Calcolare le velocità dei due frammenti, con segno.

Quesito 2.3 Dire se il frammento piú veloce rimane in orbita intorno alla terra o sfugge alla sua attrazione, e spiegare perché.



Problema 3:
Un gas perfetto monoatomico compie un ciclo come rappresentato in figura $ABCD$ dove AB e CD sono isocore, mentre BC e DA sono isoterme a temperatura T_2 e T_1 rispettivamente. Si ha $V_A = 20\,\ell$, $p_A = 2\,\mathrm{atm}$ e $p_B = 3p_A$, $V_C = 3V_B$.

Quesito 3.1 Determinare il calore *assorbito* dal gas durante il ciclo.

Quesito 3.2 Determinare l'efficienza di una macchina termica che utilizzi tale ciclo.

Quesito 3.3 Si consideri che le trasformazioni AB e CD siano ottenute mettendo in contatto termico il sistema con una sorgente a temperatura pari alla temperatura finale, rispettivamente T_2 e T_1 e mantenendo il volume costante. Calcolare la variazione dell'entropia dell'universo per mole di gas ($\Delta S/n$) in un ciclo della macchina termica.

Solo per il corso di Fisica Generale (509)

Problema 4:
Due palline cariche, entrambe di raggio $a = 2\,\mathrm{mm}$, con masse $m_1 = 30\,\mathrm{g}$ e $m_2 = 60\,\mathrm{g}$, e cariche opposte $Q_1 = q = 3\,\mathrm{nC}$ e $Q_2 = -q$, si possono muovere senza attrito lungo un asse orizzontale. Le palline sono inizialmente poste ad una distanza fra i centri pari a $d = 90\,\mathrm{cm}$.

Quesito 4.1 Calcolare le componenti x e y il campo elettrico in punto posto lungo la congiungente le due palline ad una distanza $d/3$ dalla pallina m_1.

Quesito 4.2 Le palline vengono rilasciate, da ferme. Calcolare le velocità delle palline subito prima che si urtino.

Quesito 4.3 Supponendo che l'urto sia perfettamente anelastico, calcolare la velocità delle palline subito dopo l'urto.

Soluzioni

Problema 1:

Quesito 1.1 Utilizzando il centro del cilindro come riferimento, considerando che sia la densità del cilindro, sia i fattori π si semplificano, e considerando la massa mancante come negativa, si ha:

$$d_{CM} = \frac{R^2 \cdot 0 + (-R^2/4) \cdot (-R/2)}{R^2 - R^2/4} = \frac{R}{6} = 3.33\,\mathrm{cm} \tag{1}$$

Quesito 1.2 La velocità angolare del motore è $\omega = 2\pi \cdot 300\,\mathrm{rpm}/(60\,\mathrm{s/min}) = 31.4\,\mathrm{rad/s}$ Nella posizione indicata, utilizzando un'asse verticale orientato verso l'alto, e detta R_y la reazione della cerniera sul cilindro, la prima equazione cardinale diventa:

$$R_y - Mg = Ma_c = -M\omega^2 d_{CM} \quad \Longrightarrow \quad R_y = M(g - \omega^2 d_{CM}) \tag{2}$$

La forza esercitata sull'asse del motore è uguale in modulo ed opposta ad R_y:

$$F_y = -R_y = M(\omega^2 d_{CM} - g) = 345.9\,\mathrm{N} \tag{3}$$

La componente x è invece nulla, perchè il momento della forze rispetto all'asse è nullo ed è nulla l'accelerazione angolare.

Quesito 1.3 Poichè il cilindro ruota con velocità angolare costante, bisogna che la somma di tutti i momenti delle forze esterne siano sempre nulli. La coppia esercitata dal motore sarà quindi massima quando è massimo il momento della forza di gravità che è $\tau_M = Mgd_{CM}$ in corrispondenza della posizione in cui il foro è allineato orizzontalmente all'asse di rotazione (ruotato di 90° rispetto alla posizione della figura. La potenza esercitata dal motore è $P_M = \tau_M\omega = Mgd_{CM}\omega = 154\,\mathrm{W}$

Problema 2:

Quesito 2.1 L'unica forza che agisce sul satellite è la forza di gravità, per cui dovrà essere pari alla forza centripeta necessaria a mantenerlo su un'orbita circolare:

$$\frac{m_S v^2}{R} = \frac{GM_T m_S}{R^2} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = \sqrt{\frac{gR_T^2}{R_T + h}} = 3300\,\mathrm{m/s} \tag{4}$$

Quesito 2.2 Nell'esplosione non agiscono forze impulsive esterne (la gravità della terra non è impulsiva) per cui si conserva la quantità di moto. L'energia non si conserva, ma aumenta, come indicato nel testo. Dette v_1 e v_2 le velocità dei due frammenti di uguale massa si ha:

$$\frac{m_S}{2}v_1 + \frac{m_S}{2}v_2 = m_S v \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}\frac{m_S}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_S}{2}v_2^2 = \alpha\frac{1}{2}m_S v^2 \tag{6}$$

da cui

$$v_1 + v_2 = 2v \tag{7}$$

$$v_1^2 + v_2^2 = 2\alpha v^2 \tag{8}$$

Ricavando v_2 dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene

$$v_1^2 - 2vv_1 - (\alpha - 2)v^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = v[1 \pm \sqrt{\alpha - 1}] = \begin{cases} 3v = 9900\,\mathrm{m/s} \\ -v = -3300\,\mathrm{m/s} \end{cases} \tag{9}$$

Quesito 2.3 Il frammento rimane in orbita se la sua energia totale (cinetica + gravitazionale) è minore di 0. L'energia totale è, usando l'eq (4) :

$$E = \frac{1}{2}\frac{m_S}{2}v_1^2 - \frac{GM_T m_S/2}{R} = \frac{m_S}{2}\left(\frac{9}{2}v^2 - \frac{GM_T}{R}\right) = \frac{m_S}{2}\left(\frac{9}{2}\frac{GM_T}{R} - \frac{GM_T}{R}\right) = \frac{GM_T m_S/2}{R} \cdot \frac{7}{2} > 0 \tag{10}$$

Poichè l'energia è positiva il frammento sfuggirà all'attrazione terrestre. Da notare che l'altro frammento, poichè ha la stessa velocità in modulo del satellite originale, percorrerà un orbita circolare allo stesso raggio, ma con verso opposto al satellite intero.

Problema 3:

Quesito 3.1 Il gas assorbe calore nelle trasformazioni AB isocora e BC isoterma. Si avrà $Q_{AB} = nc_V(T_B - T_A)$, mentre per un isoterma $\Delta U = 0$ da cui $Q_{BC} = -W_{BC} = \int p dV = nRT_2 \ln V_C/V_B$. Il calore assorbito è quindi, tenendo conto dell'equazione dei gas perfetti:

$$Q_{\text{ass}} = Q_{AB} + Q_{BC} = \frac{c_V}{R}(p_B V_B - p_A V_A) + p_B V_B \ln 3 = p_A V_A (3 + 3 \ln 3) = 25.4\,\text{kJ} \tag{11}$$

Quesito 3.2 Il lavoro del ciclo (fatto sul sistema) è dato da

$$W = W_{BC} + W_{DA} = -nRT_2 \ln 3 + nRT_1 \ln 3 = p_A V_A(-3+1)\ln 3 = -2p_A V_A \ln 3 \tag{12}$$

da cui:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_{\text{ass}}} = \frac{2p_A V_A \ln 3}{p_A V_A (3 + 3\ln 3)} = \frac{2 \ln 3}{3 + 3 \ln 3} = 0.35 \tag{13}$$

Quesito 3.3 La variazione di entropia del gas in un ciclo è zero, trattandosi di una funzione di stato. Per il mondo esterno si ha invece che il calore assorbito Q_{ass} viene trasferito a temperatura T_2 mentre il calore ceduto Q_{ced} viene trasferito a temperatura T_1. Tenendo presente che il calore assorbito dal gas è ceduto dal mondo esterno e viceversa, si ha

$$\frac{\Delta S}{n} = -\frac{Q_{\text{ass}}}{nT_2} + \frac{Q_{\text{ced}}}{nT_1} = \frac{Q_{\text{ass}}}{nT_1}\left[1 - \frac{T_1}{T_2} - \eta\right] = R(3 + 3\ln 3)\left[1 - \frac{1}{3} - \frac{2\ln 3}{3 + 3\ln 3}\right] = 2R = 16.62\,\text{J/mol}\cdot\text{K} \tag{14}$$

Da notare che il termine in parentesi si può scrivere come $\eta_{\text{Carnot}} - \eta$. Poichè l'efficienza di una macchina di Carnot è la massima possibile, la variazione di entropia sarà necessariamente positiva. Anche se la variazione di entropia del gas è nulla, il ciclo nel suo complesso non è reversibile perchè avviene scambio di calore tra elementi con una differenza di temperatura finita.

Solo per il corso di Fisica Generale (509)

Problema 4:

Quesito 4.1 Il campo elettrico totale è diretto lungo la congiungente le cariche, quindi la componente ortogonale è nulla, mentre la componente longitudinale, scegliendo un sistema di riferimento con l'origine dove è collocata la carica 1 ed orientato verso la carica 2, è data da

$$E_x = E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r^2} - \frac{q_2}{(d-r)^2}\right) = 374.7 \text{ N/C} \tag{15}$$

Quesito 4.2 Nel processo si conservano l'energia totale e la quantità di moto, quindi, poichè all'inizio le cariche sono ferme possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{2a} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d} \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

da cui

$$v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2 \tag{17}$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1} v_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{d}\right) = 0 \tag{18}$$

ovvero

$$v_2 = -\sqrt{\frac{q_1 q_2 (2a - d) m_1}{4\pi\epsilon_0 a d (m_2^2 + m_1 m_2)}} = -14.9 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \tag{19}$$

dove si è scelto il segno - perchè la carica 2 viaggia in senso contrario all'orientazione del sistema di riferimento scelto.

Quesito 4.3 Visto che l'urto è totalmente anelstico le due cariche rimangono attaccate e si muovono con una velocità comune; in particolare poichè la quantità di moto totale si conserva la velocità finale sarà nulla in quanto è nulla la quantità di moto totale prima dell'urto, in formula

$$(m_1 + m_2) v_f = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0. \tag{20}$$