Fisica Generale 1 per Ing. Gestionale e Chimica (Prof. F. Forti)

A.A. 2011/12 Appello del 19/02/2013.

- Tempo a disposizione: 2h30. Scrivere solamente su fogli forniti
- Modalità di risposta: spiegare sempre il procedimento seguito. Calcolare il valore numerico quando richiesto. Valore di ciascun quesito: 4 punti. Non ci sono penalità per le risposte errate. 3 punti di bonus per la chiarezza espositiva.
- Durante la prova scritta è consentito usare solo il formulario personale, strumenti di disegno e scrittura, calcolatrice: non è possibile utilizzare eserciziari o appunti. Il candidato dovrà restituire tutta la carta fornita dagli esaminatori: non è consentito utilizzare fogli di carta propri per svolgere l'elaborato.
- Si assumano i seguenti valori per le costanti che compaiono nei problemi: $g = 9.81\ ms^{-2}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg \cdot s)}$ $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$, $M_T = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 8.31\,\mathrm{J/mol \cdot K}$.

Problema 1:
Un'auto percorre una pista circolare di raggio $R = 100\,\mathrm{m}$. La legge oraria dell'auto in un sistema cartesiano xy con origine nel centro del cerchio sono:

$$\begin{cases} x = R\cos(bt^2) \\ y = R\sin(bt^2) \end{cases} \tag{1}$$

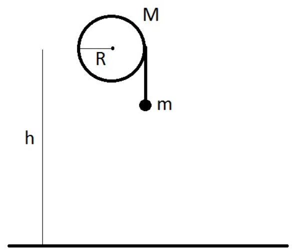
con $b = 0.01\,\mathrm{s}^{-2}$.

Quesito 1.1 Calcolare quanto tempo impiega l'auto per compiere 1/4 di giro.

Quesito 1.2 Esprimere la componente radiale dell'accelerazione in funzione del tempo e calcolarla numericamente a 1/4 di giro.

Quesito 1.3 Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra i pneumatici e la pista vale $\mu_S = 0.8$ determinare a che istante l'auto comincia a slittare.

Problema 2:
Un piccolo peso di massa $m = 3\,\mathrm{kg}$ è appeso all'estremità di una fune inestensibile e di massa trascurabile di lunghezza totale $10\,\mathrm{m}$ arrotolata per i 9/10 della sua lunghezza intorno ad un cilindro di massa $M = 10\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 0.2\,\mathrm{m}$ libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse ortogonale al disco e passante per il suo centro. L'asse del cilindro si trova ad un'altezza $h = 5\,\mathrm{m}$ da terra. All'istante $t = 0$ il sistema è fermo viene lasciato libero di muoversi sotto l'azione della gravità. Si assuma che il la fune non slitti sul cilindro.



Quesito 2.1 Calcolare l'accelerazione del peso m.

Quesito 2.2 Calcolare la velocità angolare del cilindro quando il peso tocca terra.

Quesito 2.3 Dopo che il peso ha toccato terra il disco viene fermato applicando un freno al bordo del disco stesso per un tempo $\Delta t = 4\,\mathrm{s}$. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico fra il freno ed il disco vale $\mu_d = 0.4$, calcolare il modulo della forza normale alla superficie del disco esercitata sul freno, assumendo che sia costante nel tempo.

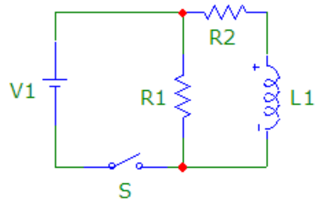
Problema 3:
Un gas perfetto biatomico compie un ciclo di Carnot in cui cede un calore Q_C=1020 J alla sorgente fredda, mentre la variazione di entropia lungo l'isoterma a temperatura piú alta è $\Delta S_H = 3.3\,\mathrm{J/K}$. Si osserva inoltre che nell'espansione adiabatica del ciclo il rapporto dei volumi è $\alpha = 5$, mentre nell'espansione isoterma il rapporto dei volumi è $\beta = 3$.

Quesito 3.1 Calcolare la temperatura della sorgente fredda .

Quesito 3.2 Calcolare il numero di moli del gas.

Quesito 3.3 Calcolare il rendimento del ciclo.

Solo per il corso di Fisica Generale (509)



Problema 4:
Si consideri il circuito disegnato in figura, con R1=R2=1.2 kΩ, L=2.5 mH, V1=10V. All'istante t=0 l'interruttore, che è inizialmente aperto, viene chiuso.

Quesito 4.1 Calcolare la corrente attraverso l'induttanza all'istante t=0.

Quesito 4.2 Trovare il tempo t_0 a cui la corrente attraverso l'induttanza ha il valore $I(t_0) = 4\,\mathrm{mA}$.

Quesito 4.3 Dopo che l'interruttore è rimasto chiuso per lungo tempo, viene riaperto. Calcolare la corrente attraverso la resistenza R1 subito dopo la riapertura, considerandola positiva se scorre dall'alto verso il basso e negativa se scorre nel verso opposto.

Soluzioni

Problema 1:

Quesito 1.1 L'argomento delle funzioni sin e cos della legge oraria rappresenta l'angolo θ lungo la pista. Un quarto di giro corrisponde a $\theta = \pi/2$ da cui

$$bt^2 = \frac{\pi}{2} \implies t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} = 12.5\,\mathrm{s} \tag{2}$$

Quesito 1.2 La componente radiale dell'accelerazione è pari all'accelerazione centripeta, $a_c = \omega^2 R$. Dalla forma $\theta(t) = bt^2$ si vede che il moto è uniformemente accelerato. In ogni caso

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = 2bt \implies a_R(t) = 4b^2t^2R \tag{3}$$

Al tempo t_1 questa accelerazione vale:

$$a_R(t_1) = 4b^2\frac{\pi}{2b}R = 2\pi bR = 6.28\,\mathrm{m/s^2} \tag{4}$$

Quesito 1.3 L'accelerazione ha due componenti: quella radiale calcolata in precedenza, e quella tangenziale pari a

$$a_T = R\alpha = R\frac{d\omega}{dt} = 2bR \tag{5}$$

La macchina inizia a slittare quando la forza totale necessaria ad accelerarla diventa uguale alla massima forza di attrito:

$$M\sqrt{a_R^2 + a_T^2} = \mu_S Mg \implies a^2 = a_R^2 + a_T^2 = \mu_s^2 g^2 \tag{6}$$

Sostituendo le espressioni (3) e (5) si ottiene

$$a^2 = (4b^2t^2R)^2 + (2bR)^2 = 4b^2R^2(1 + 4b^2t^4) = \mu_S^2 g^2 \implies t = \sqrt{\frac{1}{2b}}\sqrt[4]{\frac{\mu_s^2 g^2}{4b^2R^2} - 1} = 13.77\,\mathrm{s} \tag{7}$$

Problema 2:

Quesito 2.1 Considerando i momenti delle forze rispetto all'asse del cilindro, e detta T la tensione del filo, a l'accelerazione della massa m orientata verso il basso, e α l'accelerazione angolare del cilindro positiva in senso orario, si ha

$$mg - T = ma \quad ; \quad TR = I_{CM}\alpha \quad ; \quad a = \alpha R \tag{8}$$

dove $I_{CM} = MR^2/2$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto al centro di massa e l'ultima relazione deriva dal fatto che la corda non slitta sul cilindro. Si ottiene quindi:

$$a = \frac{mg}{m + I_{CM}/R^2} = \frac{mg}{m + M/2} = 3.68\,\mathrm{m/s^2} \tag{9}$$

Quesito 2.2 Poichè il cilindro ruota senza attrito, e la corda non slitta sul cilindro, il lavoro delle forze non conservative è nullo per cui l'energia si conserva. La parte di corda non avvolta è $L = (1 - 9/10)\cdot 10\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m}$, ed il peso m si trova inizialmente ad un'altezza $h - L$ da terra. Considerando l'energia al momento in cui m tocca terra (ma subito prima che si fermi), detta v la velocità del peso e ω la velocità angolare del cilindro si avrà:

$$mg(h - L) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \tag{10}$$

Poichè la fune non slitta sul cilindro sarà $v = \omega R$ da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{2mg(h-L)}{I_{CM} + mR^2}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2mg(h-L)}{m + I_{CM}/R^2}} = 27.13\,\mathrm{rad/s} \tag{11}$$

Quesito 2.3 Detta F_N la forza normale esercitata sul freno, la forza di attrito (tangenziale) esercitata dal freno sarà $F_D = -\mu_D F_N$, il suo momento frenante sarà $\tau = RF_D = -R\mu_D F_N$ e l'accelerazione angolare $\alpha_D = \tau/I_{CM} = -R\mu_D F_N/I_{CM}$. Si tratta di un moto circolare uniformemente decelerato con $\omega(t) = \omega_0 + \alpha_D t$ con ω_0 già ricavata in (11).

Sappiamo che $\omega = 0$ per $t = \Delta t$ da cui

$$\alpha_D = -\frac{\omega_0}{\Delta t} \implies F_N = \frac{\omega_0 I_{CM}}{R\mu_D\Delta t} = \frac{\omega_0 MR}{2\mu_D\Delta t} = 16.96\,\mathrm{N} \tag{12}$$

Problema 3:

Quesito 3.1 In un ciclo di Carnot le variazioni di entropia nelle due isoterme sono in modulo uguali, quindi:

$$T_C = Q_C/\Delta S_H = 1020/3.3\,\mathrm{K} = 309\,\mathrm{K}$$

Quesito 3.2 Il calore assorbito in una trasformazione isoterma è pari a $Q = nRT\ln(V_f/V_i)$ come si ottiene dal primo principio con $\Delta U = 0$. Nel ciclo di Carnot il rapporto dei volumi lungo l'espansione isoterma è lo stesso che lungo la compressione isoterma (teorema di Carnot). Si ottiene quindi

$$Q_C = nRT_C \ln\beta \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{Q_C}{RT_C\ln\beta} = 0.361\,\mathrm{mol} \tag{13}$$

Quesito 3.3 In una trasformazione adiabatica esiste la relazione $TV^{\gamma-1} = \text{cost.}$, quindi nell'espansione adiabatica vale la relazione:

$$T_H V_H^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_C}{T_H} = \left(\frac{V_H}{V_C}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\gamma-1}$$

da cui si ricava che:

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\gamma-1} = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{7/5-1} = 0.47$$

Solo per il corso di Fisica Generale (509)

Problema 4:

Quesito 4.1 La serie di $R2$ e $L1$ è tenuta a potenziale costante $V1$. Questo è un circuito RL per cui, nel caso di carica del circuito, vale:

$$I_L(t) = \frac{V1}{R2}\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad \tau = \frac{L1}{R2} = 2.1\ \mu\text{s}$$

Valutando l'espressione per $t = 0$:

$$i_L(0) = 0\ \text{mA}$$

Quesito 4.2 Si ricava t_0 dall'equazione:

$$I_L(t_0) = I(t_0) \Rightarrow \frac{V1}{R2}\,(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}) = I(t_0)$$

da cui:

$$t_0 = -\tau \ln\left[1 - \frac{I(t_0)R2}{V1}\right] = 0.65\ \tau = 1.37\ \mu\text{s}$$

Quesito 4.3 Prima dell'apertura dell'interruttore in R2 scorre una corrente pari a $\frac{V1}{R2} = +8.3$ mA. Subito dopo l'apertura dell'interruttore la corrente che passa nell'induttanza non cambia e quindi la maglia è percorsa in senso orario e la corrente che attraversa R1 cambia verso, da cui:

$$I_{R1} = -\frac{V1}{R2} = -8.3\ \text{mA}$$