

ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

Esercizio 1. Si consideri la matrice triangolare superiore $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ & 1 & -1 & \dots & -1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Scrivere una funzione Matlab[®] che dati in input $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ calcola $\mathbf{y} = A \cdot \mathbf{z}$ con costo $O(n)$ operazioni aritmetiche.
2. Determinare $|\det(A)|$.
3. Determinare $|\det(D^{-1} \cdot A)|$ dove $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con

$$\alpha_i = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

4. Investigare il condizionamento di A . In particolare determinare la soluzione del sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_n,$$

con $\mathbf{e}_n = [0, \dots, 0, 1]^T$. Quindi determinare s_n tale che

$$\|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 \geq s_n.$$