ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

Esercizio 1. Si consideri la matrice $A_n = (a_{i,j}^{(n)}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definita da

$$a_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j, \\ \alpha \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

con α parametro positivo. Per $n = 4$ si ha

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare condizioni su α sufficienti a garantire la predominanza diagonale.
2. Scrivendo $A_n = (1-\alpha)I_n + \alpha \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T$, con $\boldsymbol{e} = [1, \dots, 1]^T$, si verifichi che per $0 < \alpha < 1$ la matrice A risulta definita positiva.
3. Investigare sperimentalmente la convergenza del metodo di Jacobi e di Gauss-Seidel per la risoluzione di $A_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}$ con $n = 128$ e $\alpha = 1/2$.