

## ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

**Esercizio 1.** Si consideri la matrice  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$  definita da

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $A$  è la matrice di adiacenza di un grafo non orientato con 7 vertici indicati con  $1, 2, \dots, 7$  e tale che esiste un arco dal nodo  $i$  al nodo  $j$  se e solo se  $a_{i,j} = a_{j,i} = 1, 1 \leq i, j \leq 7$ .

1. Rappresentare il grafo.
2. Utilizzando il teorema di Gerschgorin ottenere una maggiorazione per il modulo dell'autovalore dominante  $\lambda_1$  di  $A$ . In particolare dimostrare che  $\lambda_1 \leq n$ , dove  $n = 7$  indica il numero di vertici del grafo.
3. Determinare un'approssimazione dell'autovalore dominante utilizzando il metodo delle potenze applicato alla matrice  $A$ .
4. Supponiamo di voler assegnare un colore ad ogni vertice in modo che a vertici adiacenti (cioè connessi da un arco) siano assegnati colori differenti. Il minimo numero di colori sufficienti si chiama numero cromatico del grafo e si indica con  $\chi$ . È stato dimostrato che

$$\frac{n}{n - \lambda_1} \leq \chi \leq \lambda_1 + 1.$$

Utilizzando questo risultato dimostrare che  $\chi \in \{2, 3\}$ .

5. Determinare il valore di  $\chi$