

ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

Esercizio 1.

Siano assegnate le coppie di punti $(x_i, f_i) \in \mathbb{R}^2$, $0 \leq i \leq n$, con $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$ e $f_i = f(x_i)$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Determinare $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ in modo tale che la funzione

$$r(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \gamma_i}{x - x_i}}{\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{x - x_i}},$$

soddisfi le condizioni di interpolazione

$$r(x_i) = f(x_i) = f_i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

2. Posto $f(x) = 1/(1+x^2)$ e $x_i = -5 + \frac{10}{n}i$, $0 \leq i \leq n$, utilizzando Matlab[®] si tracci un grafico approssimativo della funzione razionale $r(x)$ per $n = 32, 64, 128$. Cosa si conclude circa la localizzazione dei poli della funzione razionale?
3. Si valuti inoltre per le tre funzioni razionali generate al variare di n l'errore di approssimazione

$$\epsilon_n = \max_i |f(x_i) - r(x_i)|,$$

con $x_i = -5 + \frac{10}{511}i$, $1 \leq i \leq 510$.

4. Cosa suggerisce questa valutazione rispetto alla convergenza delle approssimanti razionali così costruite alla funzione $f(x)$ nell'intervallo $[-5, 5]$?