

CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2014/2015 – Appello 24/07/2015

NOME

COGNOME

MATRICOLA

Esercizio 1 Sia $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n} = (a_{i,j})$, $n \geq 3$, definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \text{ o } i = j - 1 : \\ -1 & \text{se } j = 1, 2 \text{ e } i = j + 1, \dots, n; \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per $n = 4$ si ha

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini la matrice elementare di Gauss E_1 tale che

$$E_1 [a_{1,1}, \dots, a_{n,1}]^T = [a_{1,1}, 0, \dots, 0]^T.$$

2. Si mostri che $B = E_1 \cdot A_n$ risulta triangolare superiore. Si determini quindi una fattorizzazione triangolare di A_n .

3. Si dica se tale fattorizzazione è unica.

4. Scrivere una funzione Matlab[®] che dato in input $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ restituisce in output la soluzione \mathbf{x} del sistema lineare $B\mathbf{x} = E_1\mathbf{b}$.

5. Determinare il costo computazionale dell'algoritmo.

6. Per $n \in \{64, 128, 256\}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{ones}(n, 1)$ riportare l'errore relativo ϵ_n ,

$$\epsilon_n = \frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_1}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_1},$$

tra la soluzione \mathbf{x} calcolata dall'algoritmo e la soluzione del sistema lineare $A_n\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ calcolata mediante l'operatore "backslash" di Matlab.