

CALCOLO NUMERICO  
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica  
A.A. 2014/2015 – Appello 24/07/2015

---

NOME

COGNOME

MATRICOLA

---

**Esercizio 1** Sia  $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n} = (a_{i,j})$ ,  $n \geq 3$ , definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \text{ o } j = n \\ -1 & \text{se } j = 1 \text{ e } i = j + 1, \dots, n; \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per  $n = 4$  si ha

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini la matrice elementare di Gauss  $E_1$  tale che

$$E_1 [a_{1,1}, \dots, a_{n,1}]^T = [a_{1,1}, 0, \dots, 0]^T.$$

2. Si mostri che  $B = E_1 \cdot A_n$  risulta triangolare superiore. Si determini quindi una fattorizzazione triangolare di  $A_n$ .
3. Si dica se tale fattorizzazione è unica.
4. Scrivere una funzione Matlab<sup>®</sup> che dato in input  $n \in \mathbb{N}$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  restituisce in output la soluzione  $\mathbf{x}$  del sistema lineare  $B\mathbf{x} = E_1\mathbf{b}$ .
5. Determinare il costo computazionale dell'algoritmo.
6. Per  $n \in \{64, 128, 256\}$  e  $\mathbf{b} = \mathbf{ones}(n, 1)$  riportare l'errore relativo  $\epsilon_n$ ,

$$\epsilon_n = \frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_1}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_1},$$

tra la soluzione  $\mathbf{x}$  calcolata dall'algoritmo e la soluzione del sistema lineare  $A_n\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$  calcolata mediante l'operatore "backslash" di Matlab.