# MECCANICA RAZIONALE

Titolo nota 24/09/2012

Michele Barsanti m.barsanti@dma.unipi.it

m.barsanti@gmail.com

http://users.dma.unipi.it/barsanti/meccanica

http://elearn.ing.unipi.it/course/view.php?id=133

- 2009
- 2010
- 2011
- 2012

AMENDOLA: Meccanica Razionale ed TEP (Seconda edizione?)

MATTEI: Lezioni di Meccanica Razionale (SEU)?

Goldstein Poole Sarko: "Meccanica Classica" Zanichelli

Taylor "Meccanica Classica" Zanichelli

Dispense Prof. Beghini

Mercoledì prossimo 3 ore di MR

60 ore di corso 40 lezione + 20 esercizio

esercitazioni

ESERCIZI

Eserciziario di MB Esculapio (?)

BAMPI / BENATI / MORRO "Esercizi di MR" ECIG

MATTEI / Remorini Esercizi di MR

Amendola / Trimarco / Manocorda / Ciampa
Esercizi di MR "Pellegrini"
BISCARI / VIRGA "Mechanics Notebook" Liguori

LAVORO INDIVIDUALE

http://users.dma.unipi.it/barsanti/meccanica2012
Sito di Hamasy
http://servizi.ing.unipi.it/cgi-bin/hamasy_bonus/calendar.php
DOCENTE → BARSANTI
EVENTO: Ricevimento Studenti
+ 3 PUNTI
ISCRIVETEVI entro il 7/10

26/9 → 7/10
10/10 → 21/10
24/10 → 4/11
7/11 → 18/11
21/11 → 2/12
5/12 → 16/12

6 assegnazioni

mr.lavoro.individuale@gmail.com

PROGRAMMA
VETTORI / CINEMATICA 2D e 3D / STATICA (poca)
DINAMICA

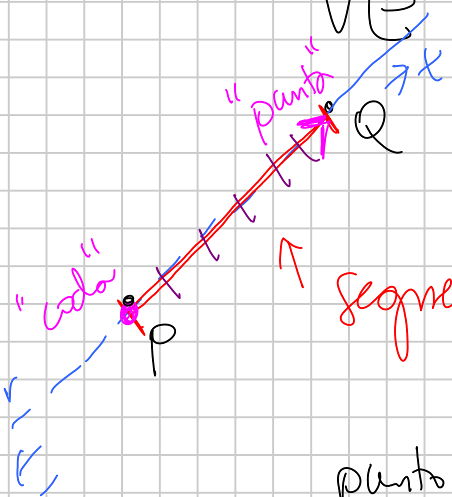
MR è bloccato da
Analisi I, Geometria e Fisica I

1 prova scritta 3 ore e 1/2 2 esercizi

4 consegne negli ultimi 7 appelli

è possibile ritirarsi (lascio 2h e 1/2 di tempo)

# VETTORI

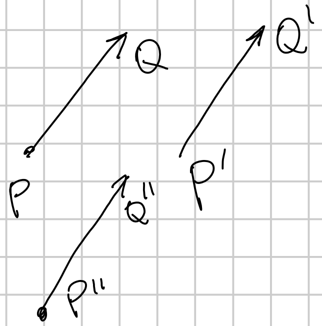



Si parte dal punto P e si arriva al punto Q

segmento orientato

- Origine $P$ — punto di applicazione
- direzione retta $r$
- verso
- lunghezza o modulo o intensità

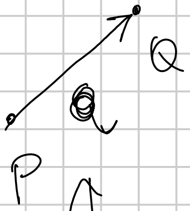
2 segmenti orientati con la stessa direzione e lo stesso verso, stessa lunghezza e origine diversa sono detti equipollenti




Vettore $PQ$, $P'Q'$, $P''Q''$

$\infty^3$ vettori equipollenti ad un vettore dato

L'insieme di tutti i vettori equipollenti a un vettore dato è detto VETTORE LIBERO




**a** ← Lettera in nero a stampa

PQ  $\vec{PQ}$ (disp. Frontoni, Abate)

Q − P (Notazione di Grassmann)

$\underline{a}$  $\vec{a}$ (Beghini)

Modo di indicare un vettore

Come si indica la lunghezza?

$|PQ|$  $\|PQ\|$ ← Norma  $\overline{PQ}$

$\underline{a}$  $|\underline{a}|$ oppure $a$ = modulo del vettore $\underline{a}$

$a \geq 0$

Se $P \equiv Q$ allora il vettore PQ ha lunghezza nulla e direzione non definibile, si indica con **0** oppure $\underline{0}$

Se decidiamo di tenere fermo il punto P, il segmento $PQ = \underline{v}$ orientato che ha origine in P e stessa direzione verso e lunghezza di $\underline{v}$ è detto VETTORE APPLICATO $(P, \underline{v})$. P è detto punto di applicazione.

La retta r per P e Q è detta retta di applicazione o retta di azione.

## GRANDEZZE SCALARI E VETTORIALI

**SCALARI** Massa, Temperatura, Energia, tempo

**VETTORIALI** posizione, velocità, accelerazione, Forza, Quantità di moto

**PSEUDO-VETTORI** velocità angolare, momento della quantità di moto, momento di una forza

**PSEUDO-SCALARI**

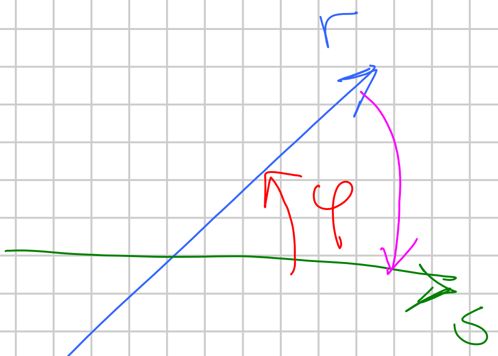
**VERSORE** è un vettore di lunghezza unitaria

$\underline{v}$ $\quad$ $\text{vers}(\underline{v}) = \hat{v}$ ha la stessa direzione e verso del vettore $v$, ma lunghezza $= 1$

$$\hat{v} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \qquad \underline{v} = |\underline{v}|\,\hat{v}$$

^ indica versore

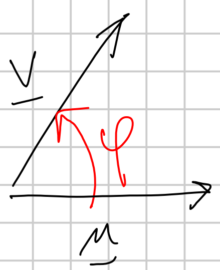
## RETTA ORIENTATA


Angolo fra s e r

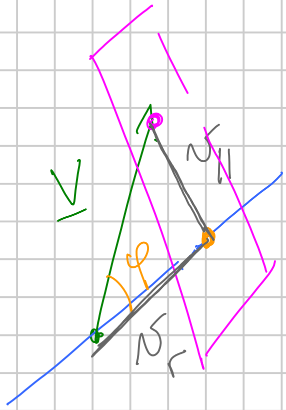
$$\widehat{sr} = -\widehat{rs}$$

Per sovrapporre le rette correttamente, si deve mantenere lo stesso verso




Positivo = rotazione antioraria

Negativo = rotazione oraria




Proiettore $\underline{v}$ su r

$$v_r = |\underline{v}| \cdot \cos\varphi$$

$v_r$ è la componente di $\underline{v}$ lungo r

---

Si sceglie una terna di versori perpendicolari fra loro, tutti della stessa lunghezza unitaria (monometrico) $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

$\hat{i} \to \hat{i}_1$, $\hat{j} \to \hat{i}_2$, $\hat{k} \to \hat{i}_3$

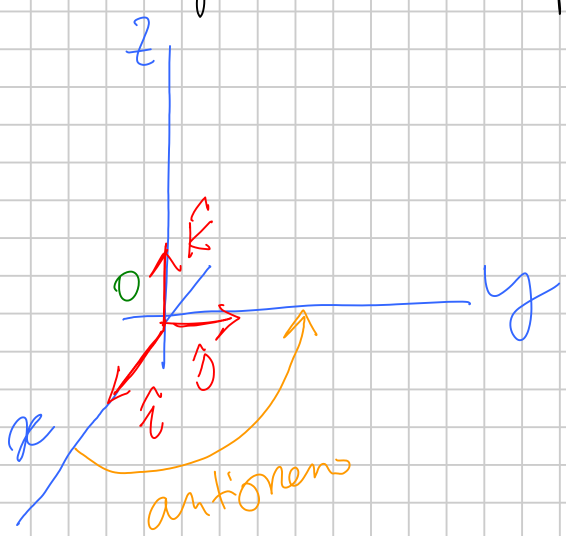
$\hat{i}$ direzione e verso dell'asse x — POLLICE

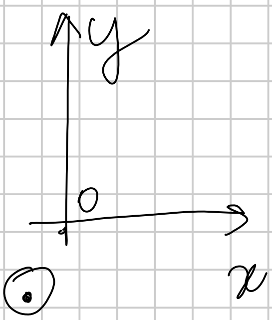
$\hat{j}$ asse y — INDICE

$\hat{k}$ asse z — MEDIO

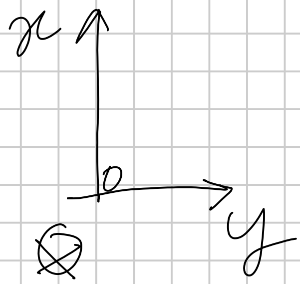
MANO DESTRA

Terna destrorsa
right-handed
(levogira su vecchi appunti)




asse z uscente



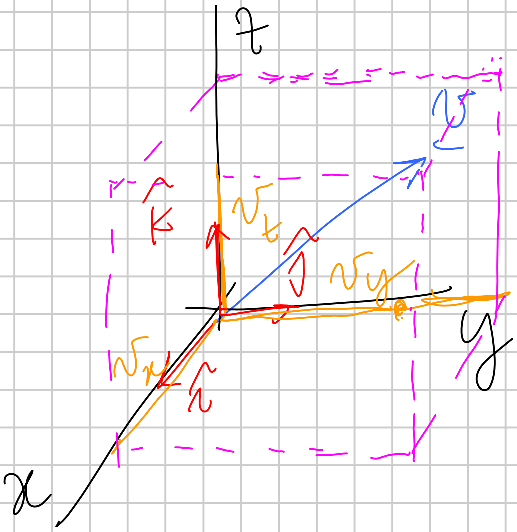

asse z entrante

dato un vettore $\underline{v}$ possiamo calcolare le componenti lungo x, y, z

$v_x$ , $v_y$ , $v_z$ le componenti cartesiane di $\underline{v}$

$v_x = |\underline{v}| \cos\alpha_1$ $\qquad v_y = |\underline{v}| \cos\beta_1$ $\qquad v_z = |\underline{v}| \cos\gamma_1$

$\alpha, \beta, \gamma$ sono numeri sempre compresi fra $-1$ e $1$ e sono detti coseni direttori di $\underline{v}$




parallelepipedo che ha lati di lunghezza

$|v_x| \quad |v_y| \quad |v_z|$

$|\underline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ ← "ipotenusa"

$\alpha = \dfrac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \qquad \beta = \dfrac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \qquad \gamma = \dfrac{v_z}{\sqrt{\phantom{v}}}$

$|\underline{v}| = 1$, $\underline{v}$ è un versore

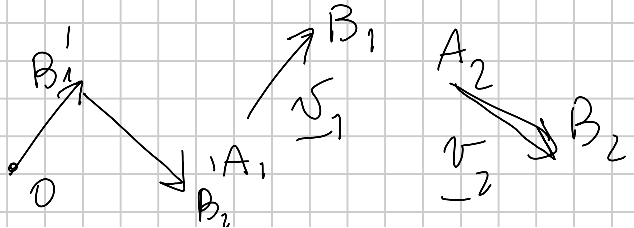
$\alpha = v_x \qquad \beta = v_y \qquad \gamma = v_z$

---

# OPERAZIONI FRA VETTORI

$n$ vettori omogenei $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \dots \underline{v}_n$

Scegliamo un punto O dello spazio e prendiamo il vettore equipollente a $\underline{v}_1$ passante per O




Scelgo un vettore $\underline{v}_2'$ equipollente a $\underline{v}_2$ e avente l'origine in $B'_1$

vettore $v'_n$ equipollente a $v_n$ avente origine in $P'_{n-1}$

$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \dots + v_n = OB'_n$ risultante o SOMMA

è un vettore libero

$$\underline{R} = \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i$$

Se $B'_n \equiv O$, allora $\underline{R} = \underline{0}$

Somma è sinonimo di composizione

Il risultato è indipendente dalla scelta di O

La somma è associativa e commutativa

Con 2 soli vettori si usa spesso la regola del parallelogramma

DIFFERENZA FRA 2 VETTORI

$$\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{v}_1 + (-\underline{v}_2)$$

$-\underline{v}_2$ ha lo stesso modulo e la stessa direzione di $\underline{v}_2$, ma verso opposto

---

DECOMPOSIZIONE DI $\underline{v}$

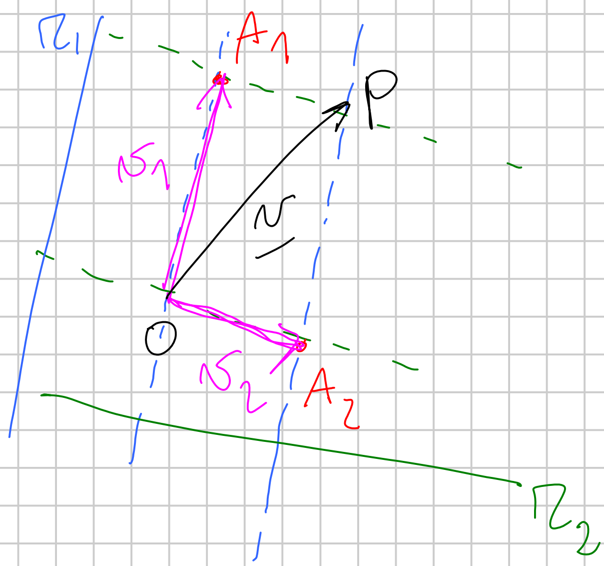
$\underline{v}$ è rappresentato da un segmento orientato AB possiamo scegliere in infiniti modi $n-1$ punti $A_1, A_2 \dots A_{n-1}$ tali che

$$AB = AA_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}B$$

in modo tale quindi che la somma di questi $n$ vettori sia proprio $\underline{v}$

---

## 2 RETTE COMPLANARI A UN VETTORE DATO

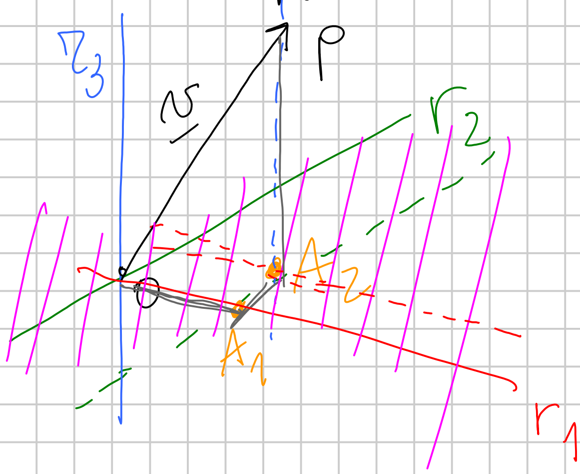



$$\underline{v_1} + \underline{v_2} = \underline{v}$$

$OA_2PA_1$ è un parallelogr.

$r_1$ non deve essere $\parallel r_2$

## 3 RETTE NON COMPLANARI

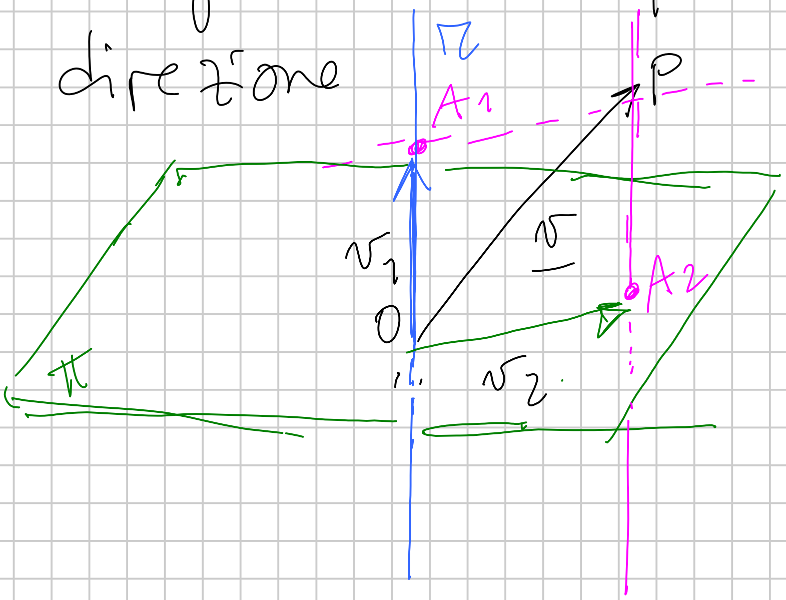



$$OA_1 + A_1A_2 + A_2P = \underline{v}$$

come $r_1$ — come $r_2$ — come $r_3$

Se prendiamo 3 rette complanari, la decomposizione non è unica

Decomposizione di $\underline{v}$ secondo una direzione assegnata e un piano ortogonale a tale direzione




$OA_1 + OA_2 = OP = \underline{v}$

$\underline{v}_2$ è il componente di $\underline{v}$ $\perp$ a r

$\underline{v}_1$ è il componente di $\underline{v}$ parallelo a r

IL COMPONENTE è un vettore

LA COMPONENTE è uno scalare

$\underline{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$

IL COMPONENTE

LA COMPONENTE

## PRODOTTO DI UNO SCALARE PER UN VETTORE

m scalare

$\underline{v}$ vettore

$\underline{u} = m\underline{v} \qquad \|\underline{u}\| = |m|\,\|\underline{v}\|$

$\underline{u}$ ha la stessa direzione di $\underline{v}$

lo stesso verso di $\underline{v}$ se $m>0$

verso opposto a $\underline{v}$ se $m<0$

è nullo se $m=0$

Il modulo di $\underline{u}$ è il valore assoluto di m per il modulo di $\underline{v}$

$$m = \pm \frac{|\underline{u}|}{|\underline{v}|} \qquad \underline{v} = |\underline{v}| \, \hat{v}$$

$$m(n\underline{v}) = n(m\underline{v}) = (nm)\underline{v}$$

$$m(\underline{v}+\underline{u}) = (m\underline{v}) + (m\underline{u})$$

$$(m+n)\underline{v} = (m\underline{v}) + (n\underline{v})$$

LA COMPONENTE di $\underline{v}$ lungo $x$

$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}, \qquad \underline{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

Scalare vettore

$$\underline{v} = \underline{v_x} + \underline{v_y} + \underline{v_z}$$

IL COMPONENTE di $\underline{v}$ lungo $x$