CURVE - FORMULE DI FRENET

Titolo nota 01/10/2012

$$R_c^{-1} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\lambda}\,\frac{d\lambda}{ds}\;\dots$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{d\lambda}\left(\quad\right)\cdot\frac{d\lambda}{ds}$$

$$\begin{cases} x = R\cos\left(\frac{s}{R'}\right) \\ y = R\sin\left(\frac{s}{R'}\right) \\ z = \frac{p\,s}{2\pi R'} \end{cases} \qquad R' = \sqrt{R^2+\frac{p^2}{4\pi^2}}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = -\frac{R}{R'}\sin\left(\frac{s}{R'}\right) \\ \frac{dy}{ds} = \frac{R}{R'}\cos\left(\frac{s}{R'}\right) \\ \frac{dz}{ds} = \frac{p}{2\pi R'} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{R}{R'^2}\cos\left(\frac{s}{R'}\right) \\ \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{R}{R'^2}\sin\left(\frac{s}{R'}\right) \\ \frac{d^2z}{ds^2} = 0 \end{cases}$$

$$R_c^{-1} = \sqrt{\frac{R^2}{R'^4}\underbrace{\left[\cos^2\left(\frac{s}{R'}\right)+\sin^2\left(\frac{s}{R'}\right)\right]}_{1}} = \frac{R}{R'^2}$$

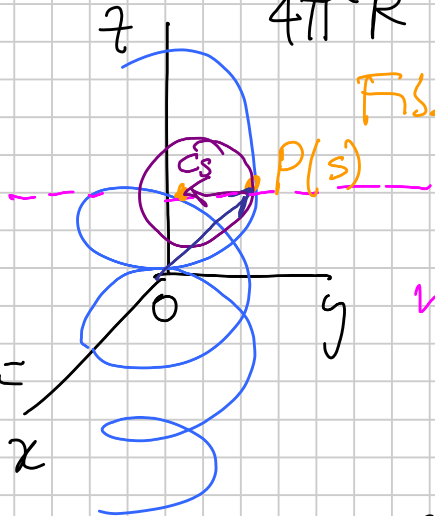
$$R_c = \frac{R'^2}{R} = \frac{R^2+p^2/4\pi^2}{R} = R+\frac{p^2}{4\pi^2R}$$

$$OC_s = OP_s + R_c(s)\,\hat{n}(s) =$$

$$R\left[\cancel{\cos\left(\frac{s}{R'}\right)}\hat{\imath}+\cancel{\sin\left(\frac{s}{R'}\right)}\hat{\jmath}\right]+\frac{ps}{2\pi R'}\hat{k}+$$

$$\left(\cancel{R}+\frac{p^2}{4\pi R}\right)\left(-\cos\left(\frac{s}{R'}\right)\hat{\imath}-\mathrm{sen}\left(\frac{s}{R'}\right)\hat{\jmath}\right)=$$

$$= -\frac{p^2}{4\pi R}\cos\left(\frac{s}{R'}\right)\hat{\imath}-\frac{p^2}{4\pi R}\sin\left(\frac{s}{R'}\right)\hat{\jmath}+\frac{ps}{2\pi R'}\hat{k}$$



Fisso s

direzione della normale principale

Il luogo geometrico dei centri delle circonferenze osculatrici di un'elica è di nuovo un'elica

$$\hat{b} = \frac{p}{2\pi R'}\left[\sin\left(\frac{s}{R'}\right)\hat{\imath} - \cos\left(\frac{s}{R'}\right)\hat{\jmath}\right] + \frac{R}{R'}\hat{k}$$

Il piano osculatore, a s fissato, ha equazione del tipo

$$\frac{\cancel{p}}{\cancel{2\pi R'}}\sin\left(\frac{s}{R'}\right)x - \frac{\cancel{p}}{\cancel{2\pi R'}}\cos\left(\frac{s}{R'}\right)y + \frac{2\pi R}{p\,\cancel{R'}}z + d = 0$$

$$\sin\left(\frac{s}{R'}\right)x - \cos\left(\frac{s}{R'}\right)y + \frac{2\pi R}{p}z + d' = 0$$

Impongo il passaggio per il punto

$$P_s \equiv \left(R\cos\left(\frac{s}{R'}\right),\ R\sin\left(\frac{s}{R'}\right),\ \frac{ps}{2\pi R'}\right)$$

$$\cancel{\sin\left(\frac{s}{R'}\right)\cdot R\cos\left(\frac{s}{R'}\right)} - \cancel{\cos\left(\frac{s}{R'}\right)R\sin\left(\frac{s}{R'}\right)} + \frac{\cancel{2\pi}R}{\cancel{p}}\cdot\frac{\cancel{p}s}{\cancel{2\pi}R'} + d' = 0$$

$$\frac{Rs}{R'} + d' = 0 \qquad d' = -\frac{Rs}{R'}$$

$$\sin\left(\frac{s}{R'}\right)x - \cos\left(\frac{s}{R'}\right)y + \frac{2\pi R}{p}z - \frac{Rs}{R'} = 0$$

$\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$ dipendono da un parametro

$\hat{t}(s), \hat{n}(s), \hat{b}(s)$ oppure $\hat{t}(\lambda), \hat{n}(\lambda), \hat{b}(\lambda)$

$\frac{d\hat{t}}{ds} \perp \hat{t} \qquad \frac{d\hat{t}}{ds} = c\hat{n}$ (1ª Formula di F-S)

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{R_c}\hat{n}$$

$$\frac{d\hat{b}}{ds} \perp \hat{b} \qquad \frac{d\hat{b}}{ds} = \cancel{\alpha\hat{t}} + \beta\hat{n}$$

$c\hat{n}$

$$0 = \hat{b}\cdot\hat{t} \qquad 0 = \left(\frac{d\hat{b}}{ds}\cdot\hat{t}\right) + \cancel{\left(\hat{b}\cdot\frac{d\hat{t}}{ds}\right)} \Rightarrow \frac{d\hat{b}}{ds}\cdot\hat{t} = 0$$

$$\frac{d\hat{b}}{ds} \propto \hat{n}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\hat{n}}$$

TORSIONE

2ª FORMULA di F-S.

Calcoliamo la torsione dell'elica

$$\hat{b} = \frac{P}{2\pi R'}\left(\sin\left(\frac{s}{R'}\right)\hat{\imath} - \cos\left(\frac{s}{R'}\right)\hat{\jmath}\right) + \frac{R}{R'}\hat{k}$$

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = \frac{P}{2\pi R'^2}\underbrace{\left[\cos\left(\frac{s}{R'}\right)\hat{\imath} + \sin\left(\frac{s}{R'}\right)\hat{\jmath}\right]}_{-\hat{n}} + 0\hat{k}$$

$$\frac{db}{ds} = -\frac{P}{2\pi R'^2}\hat{n} \qquad \tau = \frac{P}{2\pi R'^2}$$

Torsione (c'è chi dice che la torsione è $\frac{1}{\tau}$)

"Raggio di torsione" $= K = \frac{1}{\tau}$ con la nostra notazione

Se $\hat{b}$ = costante, $\frac{d\hat{b}}{ds} = 0 \rightarrow \tau = 0$ e la curva è piana

$\tau = 0 \Leftrightarrow$ curva è piana $\qquad [\tau] = L^{-1}$

$$\frac{d\hat{n}}{ds} \perp \hat{n} \qquad \frac{d\hat{n}}{ds} = \alpha\hat{t} + \beta\hat{b}$$

Chi sono α e β?

$$0 = \hat{n}\cdot\hat{t} \qquad 0 = \frac{d}{ds}(\hat{n}\cdot\hat{t}) = \frac{d\hat{n}}{ds}\cdot\hat{t} + \hat{n}\cdot\frac{d\hat{t}}{ds}$$

$= c\hat{n}$

$$0 = \alpha + c\,\underbrace{\hat{n}\cdot\hat{n}}_{=1} \Rightarrow \alpha = -c$$

$$0 = \hat{n}\cdot\hat{b} \qquad 0 = \frac{d}{ds}(\hat{n}\cdot\hat{b}) = \frac{d\hat{n}}{ds}\cdot\hat{b} + \hat{n}\cdot\underbrace{\frac{d\hat{b}}{ds}}_{=-\tau\hat{n}}$$

$$0 = \beta - \tau\,\underbrace{\hat{n}\cdot\hat{n}}_{=1} \Rightarrow \beta = \tau$$

$$\boxed{\frac{d\hat{n}}{ds} = -c\hat{t} + \tau\hat{b}}$$ 3ª formula di F-S

$$\underline{\omega} = \tau\hat{t} + c\hat{b}$$

$$\underline{\omega}\wedge\hat{t} = (\tau\hat{t} + c\hat{b})\wedge\hat{t} = c\hat{b}\wedge\hat{t} = c\hat{n} = \frac{d\hat{t}}{ds}$$

$$\underline{\omega}\wedge\hat{b} = (\tau\hat{t} + c\hat{b})\wedge\hat{b} = -\tau\hat{n} = \frac{d\hat{b}}{ds}$$

$$\underline{\omega}\wedge\hat{n} = (\tau\hat{t} + c\hat{b})\wedge\hat{n} = \tau\hat{b} - c\hat{t} = \frac{d\hat{n}}{ds}$$

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \underline{\omega}\wedge\hat{t} \qquad \frac{d\hat{b}}{ds} = \underline{\omega}\wedge\hat{b} \qquad \frac{d\hat{n}}{ds} = \underline{\omega}\wedge\hat{n}$$ ← "MORALE"

Formule di Poisson

VETTORI APPLICATI

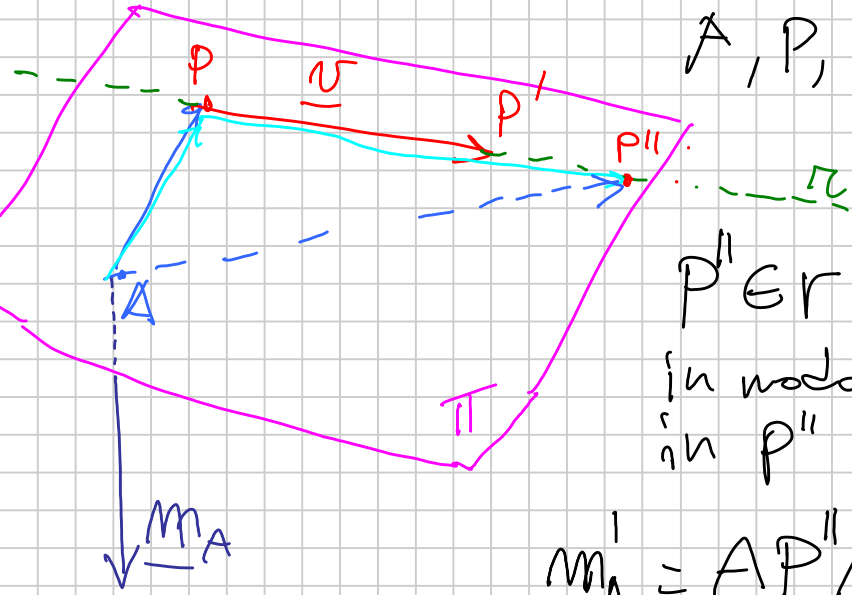
$(P, \underline{v})$ modo per rappresentare un vettore applicato

Fissiamo un punto geometrico A dello spazio (POLO)

momento polare di $(P, \underline{v})$ rispetto al polo A

$$\underline{m}_A = AP \wedge \underline{v}$$ che è un vettore (pseudo) libero

lo si può pensare applicato, ad esempio, in A



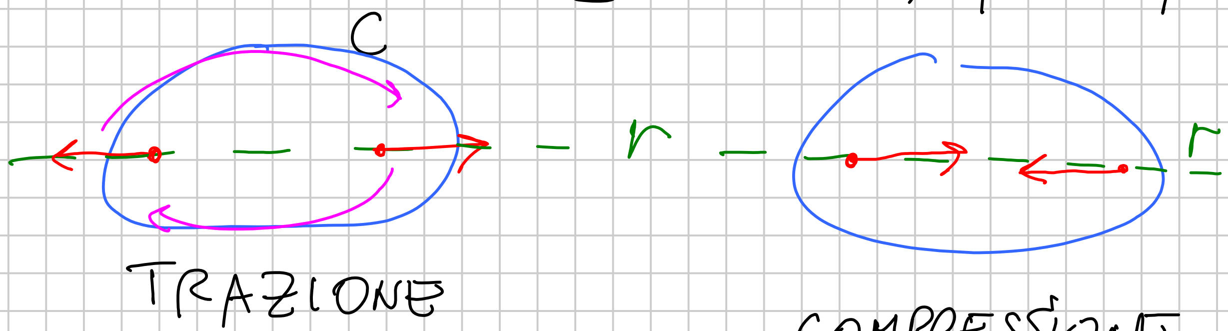
A, P, P' non allineati

$P'' \in r$ e "traslo" il vettore $\underline{v}$ in modo che venga applicato in P''

$$\underline{m}_A' = AP'' \wedge \underline{v} = (AP + PP'') \wedge \underline{v} =$$

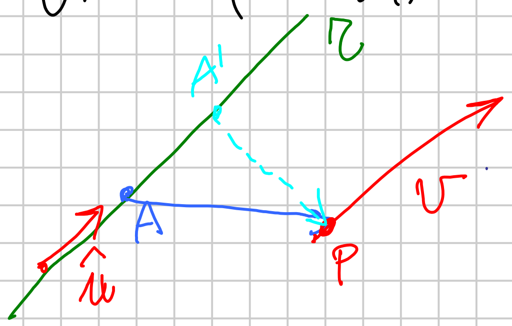
$$AP \wedge \underline{v} + \underbrace{PP'' \wedge \underline{v}}_{=\underline{0}} = \underline{m}_A + \underline{0} = \underline{m}_A$$

È possibile spostare $\underline{v}$ lungo la propria retta di azione (r) senza che $\underline{m}_A$ cambi, qualunque sia A



$$\underline{m}_A = \underline{0} \iff \begin{cases} \underline{v} = \underline{0} \\ A \in \text{retta di azione di } \underline{v} \end{cases}$$

MOMENTO DI UN VETTORE RISPETTO A UNA RETTA ORIENTATA



$(P, \underline{v})$ $\qquad \hat{u}$ $\qquad A \in r$

$\hat{u}$ dà la direz. di r

$\underline{m}_A = AP \wedge \underline{v} \rightarrow \underline{m}_A \cdot \hat{u} = m_{\hat{u}}$

$$m_{\hat{u}} = (AP \wedge \underline{v}) \cdot \hat{u}$$

$$m'_{\hat{u}} = (A'P \wedge \underline{v}) \cdot \hat{u} = [(A'A + AP) \wedge \underline{v}] \cdot \hat{u} =$$

$$= [(A'A \wedge \underline{v}) + (AP \wedge \underline{v})] \cdot \hat{u} =$$

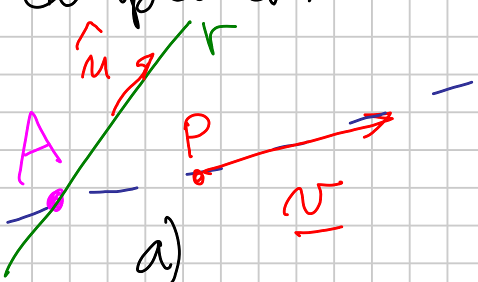
$$= (A'A \wedge \underline{v}) \cdot \hat{u} + (AP \wedge \underline{v}) \cdot \hat{u} = 0 + m_{\hat{u}}$$

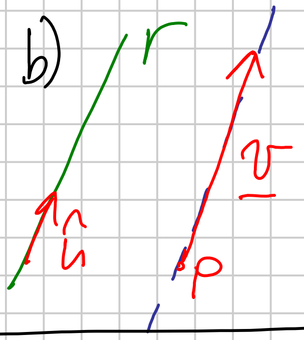
$\perp \hat{u}$ ha la stessa direzione di $\hat{u}$

Il momento assiale non dipende dalla scelta del POLO sull'asse $(A \in r,\ A' \in r)$

$m_{\hat{u}} = 0 \iff$ $\underline{v} = 0$ oppure
r e la retta d'azione di $\underline{v}$ sono complanari

Il momento assiale è un prodotto misto!
esso si annulla quando AP, $\underline{v}$, $\hat{u}$ sono complanari





a) retta d'azione di $\underline{v}$ è incidente a r

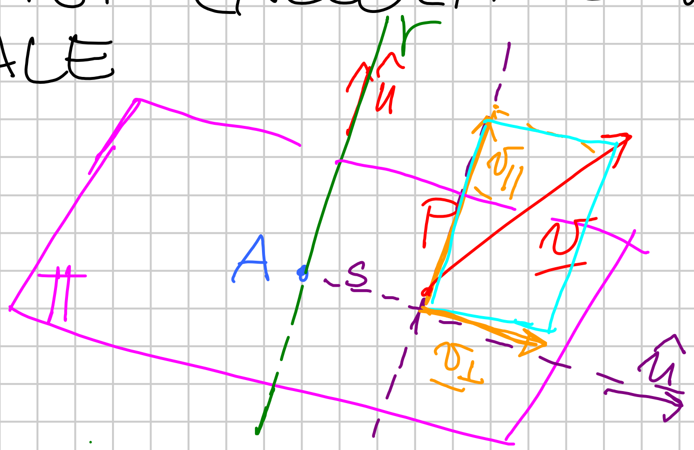
b) $\underline{v}$ vettore $/\!/$ a r

MODO GEOMETRICO PER CALCOLARE IL MOMENTO ASSIALE

Π = piano $\perp$ alla retta r e passante per P

$A = \Pi \cap r$

$\hat{u}$ è la giacitura di Π



[$ax+by+cz+d=0$ $\quad a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k} \perp \pi$]

π passa per P $\qquad \underline{v}_\parallel$ è un vettore $\parallel r$

$\underline{v} = \underline{v}_\parallel + \underline{v}_\perp$ $\qquad \underline{v}_\perp$ è un vettore $\perp r$

$$m_{\hat{u}} = (AP\wedge\underline{v})\cdot\hat{u} = [AP\wedge(\underline{v}_\parallel+\underline{v}_\perp)]\cdot\hat{u} =$$

$$= \underbrace{(AP\wedge\underline{v}_\parallel)\cdot\hat{u}}_{=0} + \underbrace{(AP\wedge\underline{v}_\perp)}_{\text{vettore } \parallel \text{ ad } \hat{u}}\cdot\hat{u} = \pm\,|AP\wedge\underline{v}_\perp|^{*}$$

$+$ se $AP\wedge\underline{v}_\perp$ ha lo stesso verso di $\hat{u}$

$-$ se $AP\wedge\underline{v}_\perp$ ha verso opposto ad $\hat{u}$

$\underline{v}_\perp = v_\perp\hat{u}'$

$$^{*}\ \pm\underbrace{|AP\wedge\hat{u}'|}_{\text{distanza fra A e la retta di versore } u' \text{ (retta s)}}|\underline{v}_\perp| = \pm\, b\cdot|\underline{v}_\perp|$$

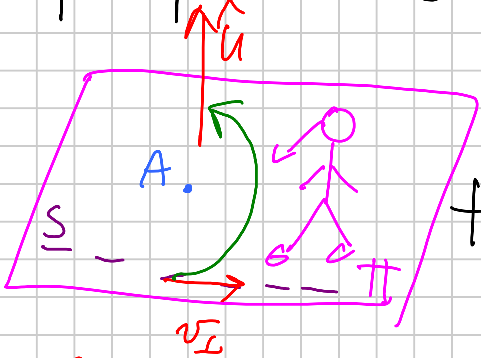
$b = d(A,s)$ è detto braccio (scalare non negativo)

retta d'azione di $\underline{v}_\perp$

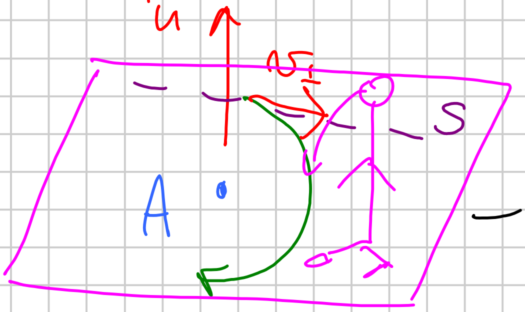
uno dei poli possibili $\in$ alla retta r

$m_A = AP\wedge\underline{v}$

NON È UN BRACCIO: è un VETTORE!



$+$ senso "antiorario"



$-$ senso "orario"

SISTEMI DI VETTORI APPLICATI

$(\Sigma) \quad (P_1, \underline{v}_1) \quad (P_2, \underline{v}_2) \; \ldots \quad (P_n, \underline{v}_n)$

n vettori applicati

IL VETTORE RISULTANTE $= \underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i$

vettore libero

Se scelgo un polo A

$$\underline{m}_{A_i} = AP_i \wedge \underline{v}_i$$

MOMENTO POLARE RISULTANTE

$$\underline{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \underline{m}_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} AP_i \wedge \underline{v}_i$$

STESSO POLO A PER TUTTI I $\underline{v}_i$

MOMENTO ASSIALE RISULTANTE

Fissare una retta r di versore $\hat{u}$

$$m_{\hat{u},i} = (AP_i \wedge \underline{v}_i) \cdot \hat{u}$$

$$M_{\hat{u}} = \sum_{i=1}^{n} m_{\hat{u},i} = \sum_{i=1}^{n} \left[(AP_i \wedge \underline{v}_i) \cdot \hat{u} \right] =$$

non dipende da i

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} AP_i \wedge \underline{v}_i \right) \cdot \hat{u} = \underline{M}_A \cdot \hat{u}$$

$A \in r$ scelto a piacere

Il momento assiale si ottiene proiettando il momento polare risultante

COSA SUCCEDE SE TUTTI I VETTORI SONO APPLICATI IN UNO STESSO PUNTO P
(OPPURE SE TUTTE LE RETTE DI AZIONE SONO CONCORRENTI IN UNO STESSO PUNTO P)

(P, v_1) (P, v_2) - - (P, v_n)

$$\underline{M}_A = \sum_{i=1}^{n} AP \wedge \underline{v}_i = AP \wedge \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i}_{\underline{R}} = AP \wedge \underline{R}$$

stesso per tutti i $\underline{v}_i$

TEOREMA DI VARIGNON: se tutti i vettori $\underline{v}_i$ sono applicati in P (se tutte le rette d'azione dei $\underline{v}_i$ sono concorrenti in P) il momento polare rispetto ad A e il momento assiale rispetto a una retta r di versore $\hat{u}$ sono coincidenti con le quantità che si ottengono impiegando un solo vettore AP e un solo vettore $\underline{R}$

$$\underline{M}_A = AP \wedge \underline{R} \qquad M_{\hat{u}} = (AP \wedge \underline{R}) \cdot \hat{u}$$

$$M_{\hat{u}} = \sum_{i=1}^{n} \left[(AP \wedge v_i) \cdot \hat{u} \right] = \left[AP \wedge \left(\sum v_i \right) \right] \cdot \hat{u} =$$

$$(AP \wedge \underline{R}) \cdot \hat{u}$$

COSA SUCCEDE CAMBIANDO POLO?

2 POLI DISTINTI A e B

$$\underline{M}_B = \sum_{i=1}^{n} BP_i \wedge \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (BA + AP_i) \wedge \underline{v}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(BA \wedge v_i) + (AP_i \wedge v_i) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (BA \wedge v_i) + \sum_{i=1}^{n} (AP_i \wedge v_i) = BA \wedge \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i}_{\underline{R}} + \underline{M}_A =$$

$$= BA \wedge \underline{R} + \underline{M}_A$$

$$\boxed{\underline{M}_B = BA \wedge \underline{R} + \underline{M}_A}$$

FORMULA DI TRASPORTO DEL MOMENTO

Se $\underline{R} = \underline{0}$, $\underline{M}$ non dipende dalla scelta del polo

Se $\underline{R} \neq \underline{0}$, $\underline{M}$ varia al variare del polo, ma resta costante se AB diretto parallelamente a $\underline{R}$ (se sposto il polo lungo la direzione data da $\underline{R}$, $\underline{M}$ non varia)

$\exists$ un componente di $\underline{M}$ che non varia mai

il componente di $\underline{M}$ parallelo a $\underline{R}$

$$\boxed{\hat{R} = \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|}}$$

$\underline{M}_A \cdot \hat{R}$ $\quad \underline{M}_B \cdot \hat{R} = \left[(BA \wedge \underline{R}) + \underline{M}_A \right] \cdot \hat{R} =$

$$\underbrace{(BA \wedge \underline{R}) \cdot \hat{R}}_{=0} + \underline{M}_A \cdot \hat{R} \qquad \underline{M}_B \cdot \hat{R} = \underline{M}_A \cdot \hat{R}$$

$\underline{M} \cdot \underline{R} = \tau$ è detto trinomio invariante

$$\tau = M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z$$