ASSE CENTRALE

Titolo nota 02/10/2012

Domani e tutti i mercoledì in aula C12 ricevimento

$\mathcal{T} = \underline{M} \cdot \underline{R}$ trinomio invariante

$\underline{M}_A \cdot \underline{R} = \underline{M}_B \cdot \underline{R} = \ldots$

$$\underline{M}_B \cdot \underline{R} = \underbrace{\left[(BA \wedge \underline{R}) + \underline{M}_A\right]}_{\underline{M}_B} \cdot \underline{R} = \overbrace{(\underbrace{BA \wedge \underline{R}}_{\perp \underline{R}}) \cdot \underline{R}}^{=0} + \underline{M}_A \cdot \underline{R}$$

$\mathcal{T} = M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z$

$$\hat{\underline{R}} = \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|}$$

$$\underline{M}_A = \underline{M}_{A//} + \underline{M}_{A\perp} = \boxed{\left(\frac{\underline{M}_A \cdot \underline{R}}{|\underline{R}|}\right) \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|}} + \underline{M}_{A\perp}$$

$\mathcal{T}$ non dipende dal polo

non dipende da A

$$\underline{M}_{//} = \frac{\mathcal{T}}{|\underline{R}|^2} \underline{R}$$

ASSE CENTRALE

$(P_1, \underline{v}_1), (P_2, \underline{v}_2) \ldots (P_n, \underline{v}_n) \qquad \underline{R} \neq \underline{0}$

Cerchiamo il luogo geometrico dei punti P rispetto ai quali $\underline{M}_P // \underline{R}$ (*) oppure $\underline{M}_P$ è nullo

LUOGO GEOMETRICO: Data una proprietà $\mathcal{P}$ (*) si dice luogo geometrico l'insieme di <u>tutti</u> e <u>soli</u> i punti dello spazio che verificano la proprietà $\mathcal{P}$ (*)

$\underline{M}_P \wedge \underline{R} = \underline{0}$

Risulterà che tale luogo è una retta ($\underline{R} \neq \underline{0}$)
$\underline{M}_P = \underline{0}$ oppure $\underline{M}_P \parallel \underline{R}$ parallela a $\underline{R}$

$\underline{M}_A$ B tale che $AB = \lambda \underline{R}$

$$\underline{M}_B = \cancel{(-\lambda \underline{R} \wedge \underline{R})} + \underline{M}_A$$

Trovare un punto particolare P_0 tale per cui $\underline{M}_{P_0} \parallel \underline{R}$
Supponiamo di conoscere $\underline{M}_A$

$$\underline{M}_{P_0} = \underline{M}_A + P_0A \wedge \underline{R} \quad \text{formula del trasporto}$$

$$\underline{M}_{P_0} \wedge \underline{R} = \underline{0} \qquad [\underline{M}_A + (P_0A \wedge \underline{R})] \wedge \underline{R} = \underline{0}$$

$$\underline{M}_A \wedge \underline{R} + (P_0A \wedge \underline{R}) \wedge \underline{R} = \underline{0}$$

$$\underline{M}_A \wedge \underline{R} + (P_0A \cdot \underline{R})\underline{R} - |\underline{R}|^2 P_0A = \underline{0}$$

incognita

$$AP_0 = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}_A}{|\underline{R}|^2} \quad \text{funziona bene. Proviamo!}$$

$$\cancel{\underline{M}_A \wedge \underline{R}} + \underbrace{\left(\cancel{-\frac{\underline{R} \wedge \underline{M}_A}{|\underline{R}^2|}} \cdot \underline{R}\right)}_{0}\underline{R} + \cancel{|\underline{R}|^2 \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}_A}{|\underline{R}|^2}} = \underline{0}$$

$\perp \underline{R}$

$$\underline{M}_0 \qquad OP(\lambda) = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}_0}{|\underline{R}|^2} + \lambda \hat{R} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Se P appartiene a questa retta, allora $\underline{M}_P \parallel \underline{R}$

Se $\underline{M}_{P^*} \parallel \underline{R}$ $(\underline{M}_{P^*} \wedge \underline{R} = \underline{0})$, allora $P_* \in$ asse centrale

ipotesi

l'abbiamo trovato prima

$$\underline{M}_{P^*} = \underline{M}_{P_0} + \underbrace{P_*P_0 \wedge \underline{R}}_{\text{anche questo deve essere} \parallel \underline{R}}$$

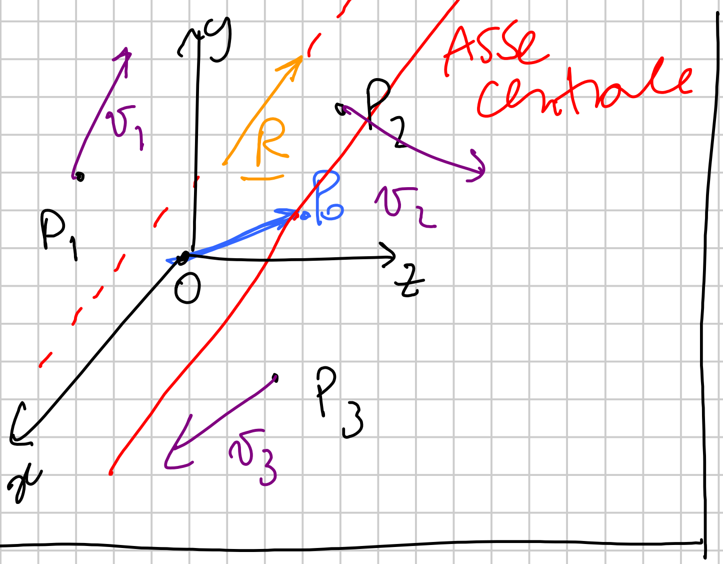
entrambi $\parallel R$

impossibile! $\Rightarrow P_*P_0 \wedge \underline{R} = 0$

P_*P_0 deve essere un vettore $\parallel \underline{R}$

deve esistere λ^* tale per cui $P_*P_0 = \lambda^* \hat{R}$

$$OP_* = OP_0 + P_0P_* = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}_0}{|\underline{R}|^2} - \lambda^* \hat{R} \qquad P_* \in \text{asse centrale}$$



Ci piacerebbe essere in grado di sostituire ad un sistema Σ di vettori applicati un unico vettore $\underline{R}$, magari sull'asse centrale

SI PUÒ SEMPRE FARE? NO

SI PUÒ FARE, SOTTO ALTRE IPOTESI?

TALVOLTA SÌ!

$$\underline{M}_A = \underline{M}_{\parallel} + \underline{M}_{A\perp}$$

lo posso cambiare, ma non potrai mai annullare $\underline{M}_{\parallel}$!

Qual è il minimo valore possibile di $|\underline{M}_A|$?

$$|\underline{M}_A|^2 = |M_{/\!/}|^2 + \cancel{|\underline{M}_{A\perp}|^2}$$

↳ può essere eliminato sempre

Bisogna prendere $A \in$ asse centrale

Ci sono dei casi in cui $|\underline{M}_{/\!/}| = 0$: quando $\mathcal{T} = 0$

$\mathcal{T} = \underline{M} \cdot \underline{R} = 0$ se $\underline{M} = \underline{0}$ oppure $\underline{M} \perp \underline{R}$

Casi importanti in cui $\mathcal{T} = 0$

1) Σ è un sistema di vettori tutti $\in$ ad uno stesso piano π $\quad A \in \pi \quad \underline{R} \in \pi \quad \underline{M}_A \perp \pi$

$AP_i \in \pi$

$AP_i \wedge v_i \perp \pi$

$\rightarrow \underline{M}_A \cdot \underline{R} = 0$

2) Σ è un sistema di vettori tutti paralleli fra loro (anche nello spazio)

$\underline{v}_i = f_i \, \hat{u} \qquad \underline{R} = r \, \hat{u}$

$\underline{m}_i = AP_i \wedge \underline{v}_i \perp \underline{v}_i \Rightarrow \perp \hat{u}$

$\sum m_i = \underline{M}_A$ sarà anch'essa $\perp \hat{u}$

$\underline{M}_A \cdot \underline{R} = 0$

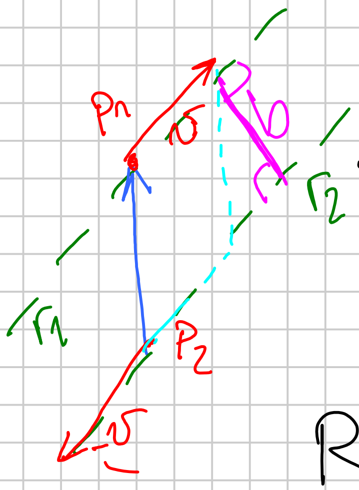
3) Σ è un sistema di vettori le cui rette di azione si incontrano tutte in un punto A (vettori concorrenti)

$AP_i \,/\!/\, \underline{v}_i \qquad \underline{M}_A = \underline{0} \qquad \underline{M}_A \cdot \underline{R} = 0$

In questi 3 casi, Σ può essere reso "equivalente" ad un solo vettore

C'è un caso molto importante di 2 vettori avente $\underline{R} = \underline{0}$

COPPIA $(P_1, \underline{v})$ $(P_2, -\underline{v})$

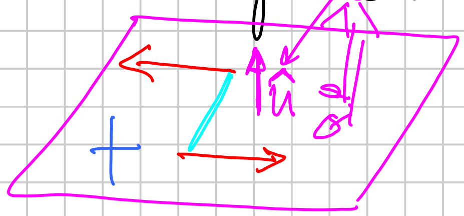


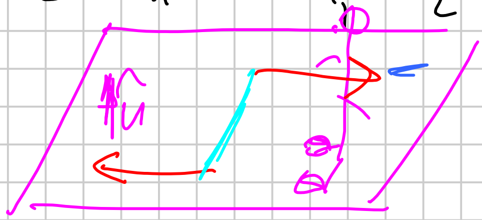
b = distanza fra le 2 rette di azione braccio della coppia. È una quantità scalare

$\underline{R} = (+\underline{v}) + (-\underline{v}) = \underline{0}$ → $\underline{M}$ non dipende dalla scelta del polo, scelgo, ad esempio, P_2

$$\underline{M} = \cancel{P_2P_2 \wedge (-\underline{v})} + P_2P_1 \wedge (\underline{v}) = \pm b |\underline{v}| \hat{u}$$

$\hat{u}$ = versore diretto perpendicolarmente al piano π su cui giacciono le 2 rette r_1, r_2





Se $b = 0$, si ha $\underline{M} = 0$ coppia a braccio nullo

Dato $\underline{M}$, esistono infiniti sistemi di 2 vettori opposti che la realizzano $|v| = \frac{|\underline{M}|}{b}$

Libro prof. Amendola es. p 19

SISTEMI DI VETTORI EQUIVALENTI ED EQUILIBRATI

2 sistemi Σ e Σ' sono equivalenti se hanno la stessa risultante $\underline{R} = \underline{R}'$ e lo stesso momento risultante rispetto a un qualunque* polo $\underline{M}_A = \underline{M}'_A$

* Basta verificare rispetto a un polo solo

$$\underline{M}_B = \underline{M}_A + BA \wedge \underline{R} \qquad \underline{M}'_B = \underline{M}'_A + BA \wedge \underline{R}'$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{M}_B = \underline{M}'_B$$

Sistema di vettori Σ si dice equilibrato se $\underline{R} = \underline{0}$ e $\underline{M} = \underline{0}$ (non c'è bisogno di scrivere il polo)

OPERAZIONI ELEMENTARI CHE LASCIANO "INALTERATO" UN SISTEMA DI VETTORI

1) al posto di più vettori tutti applicati in P, sostituisco un solo vettore applicato in P pari al risultante di tutti i "vecchi" vettori applicati in P

2) al posto di un vettore $\underline{v}$ applicato in P, metto tanti vettori tutti applicati in P che hanno come risultante $\underline{v}$

3) aggiungere o sopprimere una coppia a braccio nullo

$\hookrightarrow$ TRASPORTO DI UN VETTORE LUNGO LA PROPRIA RETTA DI AZIONE

$(P, \underline{v})$ $\quad a$ = retta di azione di $\underline{v}$

$P_* \in a$ $\quad (P, \underline{v})\ (P_*, \underline{v})\ (P_*, -\underline{v})$

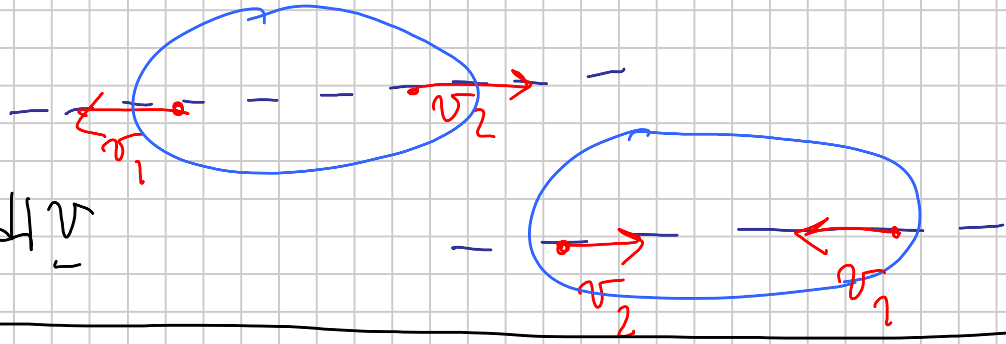
$\cancel{(P, \underline{v})\ (P_*, -\underline{v})}\ (P_*, \underline{v})$

DAL PUNTO DI VISTA DELL'EQUIVALENZA

DEI SISTEMI DI VETTORI, È IMPORTANTE LA RETTA DI AZIONE, NON IL PUNTO DI APPLICAZIONE

$(a, \underline{v}) \leftarrow$ CURSORE

a = retta d'azione di $\underline{v}$



Un sistema di vettori Σ (applicati) avente $\underline{R} \neq 0$ è equivalente ad un sistema Σ' formato da un vettore + una coppia

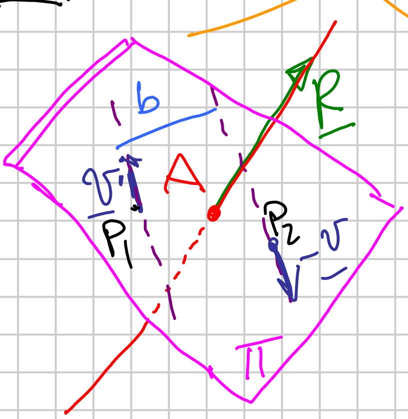
$\downarrow$ $\underline{R}$ applicato in un punto generico A dell'asse centrale

$\downarrow$ ha momento pari ad $\underline{M}_A$ (momento dei vettori di Σ calcolato rispetto ad A)

$\underline{M}_A \parallel \underline{R}$ $\qquad (\underline{R}_{coppia} = \underline{0})$

$$\underline{R}' = \underline{R} + \underline{R}_{coppia} = \underline{R} + \cancel{\underline{v} + (-\underline{v})} = \underline{R}$$

$$\underline{M}_A' = \cancel{AA \wedge \underline{R}} + \underline{M}_{coppia} \overset{= \underline{M}_A}{} = \underline{M}_A$$

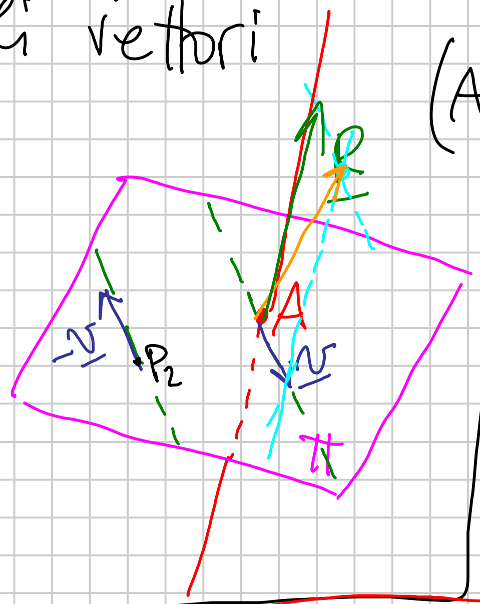


Σ' è costituito da 1 vettore + una coppia

$(\underline{R}, A) \quad (\underline{v}, P_1) \quad (-\underline{v}, P_2)$

$$\underline{M}_A' = \cancel{AA \wedge \underline{R}} + \underbrace{AP_1 \wedge \underline{v} + AP_2 \wedge (-\underline{v})}_{\underline{M}_A}$$

È possibile fare in modo che un sistema Σ sia equivalente ad un sistema Σ' formato da due soli vettori



$(A, \underline{R}+\underline{v})$ $(P_2, -\underline{v})$ sono 2 vettori che costituiscono un sistema equivalente a Σ

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema Σ di vettori applicati sia equivalente a un solo vettore o a una sola coppia è $\tau = 0$

$\Rightarrow$ Se Σ è equivalente a $\underline{v}_0$, allora (scegliendo P sulla retta di azione di $\underline{v}_0$) si ha $\underline{M}_P = \underline{0}$, quindi $\tau = 0$

Se Σ è equivalente a (P_1, v_0) $(P_2, -v_0)$ allora $\underline{R} = 0$ e quindi $\tau = 0$

$\Leftarrow$ Se $\tau = 0$

- $\underline{R} = \underline{0}$ $\underline{M} \neq 0$ Σ è equivalente a una coppia di momento $\underline{M}$
- $\underline{R} \neq 0$ $\underline{M} = \underline{M}_{\parallel} + \underline{M}_{A\perp}$ $= 0$ se $A \in$ asse centrale

  $\underline{M}_{\parallel} = \underline{0}$ perché $\tau = 0$

  Σ è equivalente al solo vettore $\underline{R}$ applicato in un punto dell'asse centrale

Se Σ ha $\tau \neq 0$, allora Σ è sempre equivalente a un vettore + una coppia (oppure 2 vettori)

In questo caso non si possono annullare né $\underline{R}$ né $\underline{M}_P$

Se Σ ha $\mathcal{I}=0$ ci sono 3 casi

$\underline{R} \neq 0 \rightarrow \Sigma$ è equivalente a un solo vettore

$\underline{R}=\underline{0}$ $\underline{M} \neq \underline{0} \rightarrow \Sigma$ è equivalente a una coppia

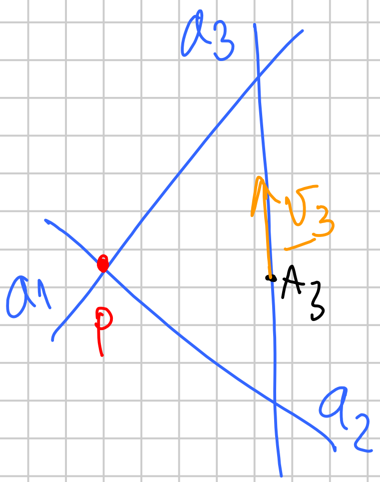
$\underline{R}=\underline{0}$, $\underline{M}=\underline{0} \rightarrow \Sigma$ è equilibrato (equivalente al vettore $\underline{0}$)

ESEMPI

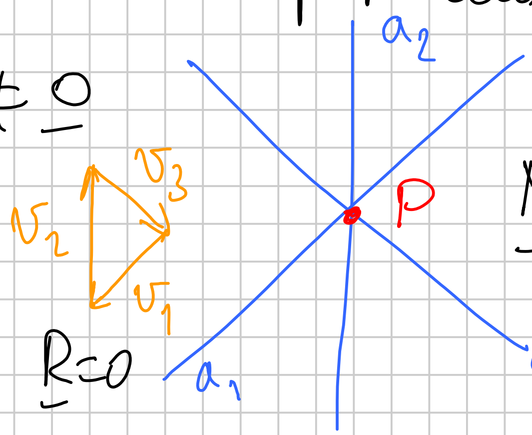
1) 2 vettori costituiscono un sistema equilibrato se e solo se sono una coppia a braccio nullo

2) Affinché 3 vettori costituiscano un sistema equilibrato occorre che le loro rette di azione siano complanari e che abbiano un punto in comune proprio o all'infinito

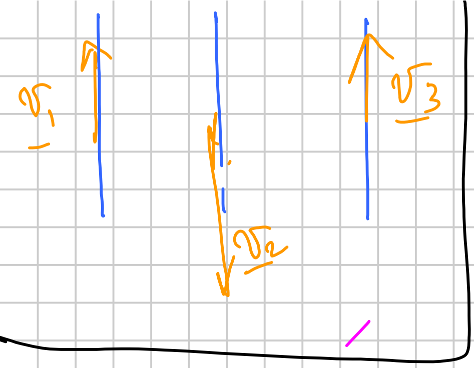
(rette concorrenti) (rette parallele)



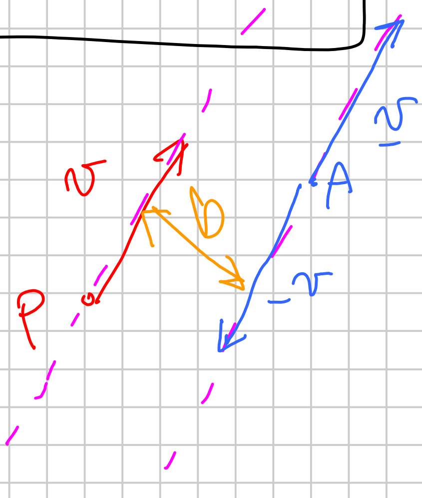
$\underline{M}_P = PA_3 \wedge \underline{v}_3 \neq \underline{0}$



$\underline{M}_P=\underline{0}$



3) Cosa succede quando si trasla un vettore <u>non</u> lungo la propria retta di azione?



$$(P, \underline{v}) \sim (P, \underline{v}) + (A, \underline{v}) + (A, -\underline{v})$$

$$\sim (A, \underline{v}) + \underbrace{(P, \underline{v}) + (A, -\underline{v})}_{\text{coppia a braccio } b \neq 0}$$

$$|\underline{M}| = b \cdot |v|$$