VETTORI - CINEMATICA

$\underline{v_1} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \quad (N)$ | $P_1 \equiv (0, 1, 2)$ m

$\underline{v_2} = 3\hat{i} + 2\hat{k}$ N | $P_2 \equiv (-1, 0, 1)$ m

$\underline{v_3} = -2\hat{j} + \hat{k}$ N | $P_3 \equiv (2, 0, 0)$ m

$$\underline{R} = \underline{v_1} + \underline{v_2} + \underline{v_3} = 5\hat{i} - 1\hat{j} + 2\hat{k} \text{ N}$$

$$|\underline{R}| = \sqrt{25+1+4} = \sqrt{30} \text{ N}$$

$$\underline{M_0} = OP_1 \wedge \underline{v_1} + OP_2 \wedge \underline{v_2} + OP_3 \wedge \underline{v_3} =$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}) + (+5\hat{j}) + (-2\hat{j} - 4\hat{k}) =$$

$$-3\hat{i} + 7\hat{j} - 6\hat{k} \quad \text{N} \cdot \text{m}$$

$$\mathcal{T} = \underline{M_0} \cdot \underline{R} = (-3) \cdot 5 + 7 \cdot (-1) + (-6) \cdot 2 = -15 - 7 - 12 =$$

$$= -34 \text{ N}^2 \cdot \text{m} \neq 0$$

$$OP_0 = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M_0}}{|R|^2} = \frac{1}{30} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & +7 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{30}(-8\hat{i} + 24\hat{j} + 32\hat{k})$$

$= \left(-\frac{4}{15}\hat{i} + \frac{12}{15}\hat{j} + \frac{16}{15}\hat{k}\right) m \qquad P_0 \equiv \left(-\frac{4}{15}, \frac{12}{15}, \frac{16}{15}\right) m$

Eq. parametriche:
$$\begin{cases} x = 5\lambda - \frac{4}{15} \\ y = -\lambda + 12/15 \\ z = 2\lambda + 16/15 \end{cases}$$

$P \equiv (x, y, z)$

$$\underline{M}_P = PP_1 \wedge \underline{v}_1 + PP_2 \wedge \underline{v}_2 + PP_3 \wedge \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -x & 1-y & 2-z \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} +$$
$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1-x & -y & 1-z \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2-x & -y & -z \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-2y - z - 3)\hat{i} + (2x - 5z + 7)\hat{j} + (x + 5y - 6)\hat{k} \quad N \cdot m$$

$\underline{M}_P \cdot \underline{R} = -34 \ \forall P$

$$5(-2y - z - 3) + (-1)(2x - 5z + 7) + 2(x + 5y - 6) =$$
$$\cancel{-10y} - \cancel{5z} - 15 \cancel{-2x} + \cancel{5z} - 7 \cancel{+2x} + \cancel{10y} - 12 = -34$$

$$\exists \xi : (-2y - z - 3)\hat{i} + (2x - 5z + 7)\hat{j} + (x + 5y - 6)\hat{k} =$$
$$= \xi (5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$ purché $P \equiv (x, y, z)$ appartenga all'asse centrale

$$\xi = \frac{|\underline{M}_{\parallel}|}{|R|} = \frac{\underline{M}_P \cdot \underline{R}}{|R|^2} = \frac{-34}{30} = -\frac{17}{15}$$

Si può trovare l'asse centrale come $\cap$ di 2 piani

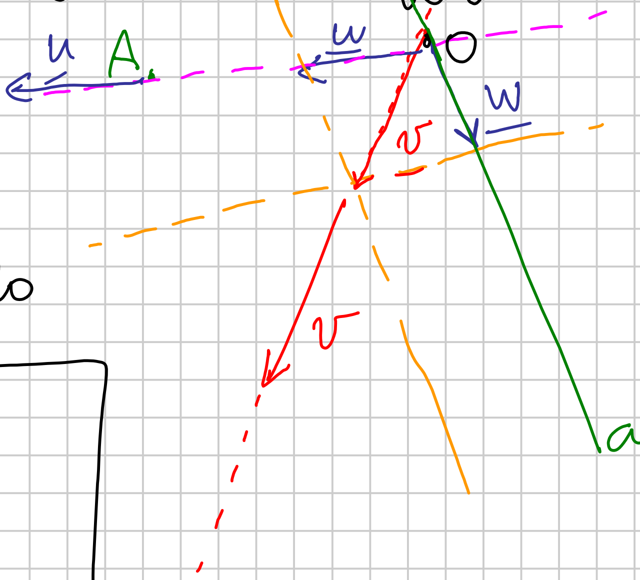
Ripasso costruzione grafica

$(P, \underline{v})$ espresso come un sistema di 2 vettori ad esso complanari: il primo applicato in un punto A dato, il secondo diretto come una retta di azione a data

$\underline{v} = \underline{w} + \underline{u}$

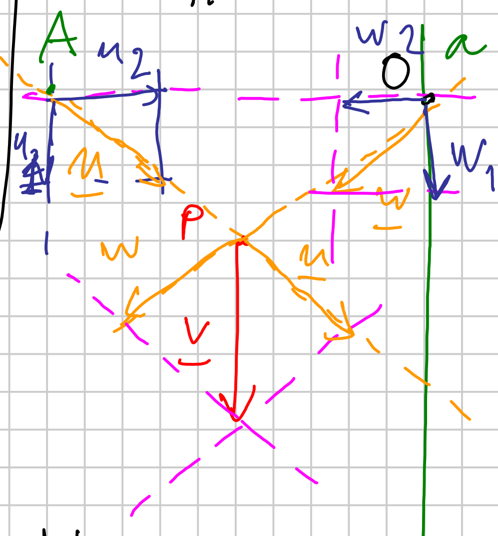
$\underline{v} \nparallel a$

non parallelo



2° caso

$\underline{V} \parallel a$



Conduco per A una retta non parallela alla retta a

$\underline{u}_2 + \underline{w}_2 = \underline{0}$

$\underline{V} = \underline{u}_1 + \underline{w}_1$

applicato in A

diretto come a

CENTRO DI VETTORI PARALLELI

$(P_i, \underline{v}_i)$ $\quad i = 1 \dots n \quad$ $\underline{v}_i = f_i \hat{u}$ $\quad \hat{u}$ è comune a tutti i vettori

$f_i = \underline{v}_i \cdot \hat{u}$ $\quad f_i = |\underline{v}_i|$ se $\underline{v}_i$ e $\hat{u}$ sono concordi

$f_i = -|\underline{v}_i|$ se $\underline{v}_i$ e $\hat{u}$ sono discordi

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i = \hat{u} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_i}_{f} \neq 0 \quad \text{IPOTESI}$$

$$f \neq 0$$

DEF: $$OC = \frac{\sum_{i=1}^{n} OP_i f_i}{f}$$ O è arbitrario

Chi ci assicura che la posizione di C non dipende da O?

$$O'C' = \frac{\sum O'P_i f_i}{f} = \frac{\sum (O'O + OP_i) f_i}{f} = \frac{\sum O'O f_i}{f} + \frac{\sum OP_i f_i}{f} = O'O \underbrace{\frac{\sum f_i}{f}}_{1} + OC = O'O + OC = O'C$$

$$O'C' = O'C \Rightarrow C' \equiv C$$

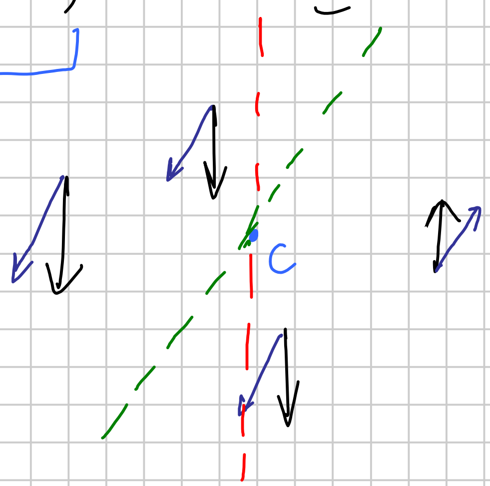
Mostriamo che $C \in$ asse centrale del sistema

$$\underline{M}_C = \sum CP_i \wedge \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} CP_i \wedge (f_i \hat{u}) = \sum_{i=1}^{n} (f_i CP_i \wedge \hat{u})$$

$$= \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_i CP_i}_{\underline{0}}\Big)^{*} \wedge \hat{u} = \underline{0} \wedge \hat{u} = \underline{0} \Rightarrow C \in \text{asse centrale}$$

$$\sum f_i OP_i = f\, OC$$

$$\sum f_i CP_i^{*} = f\, \underbrace{CC}_{0}$$

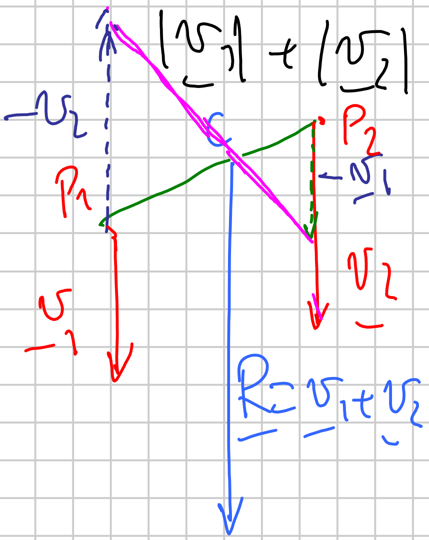


CASI PARTICOLARI

a) 2 vettori concordi

$$OC = \frac{|\underline{v}_1|\,OP_1 + |\underline{v}_2|\,OP_2}{|\underline{v}_1| + |\underline{v}_2|}$$

$$P_1C = \frac{|\underline{v}_2|\,P_1P_2}{|\underline{v}_1| + |\underline{v}_2|} \qquad P_2C = \frac{|\underline{v}_1|\,P_2P_1}{|\underline{v}_1| + |\underline{v}_2|}$$



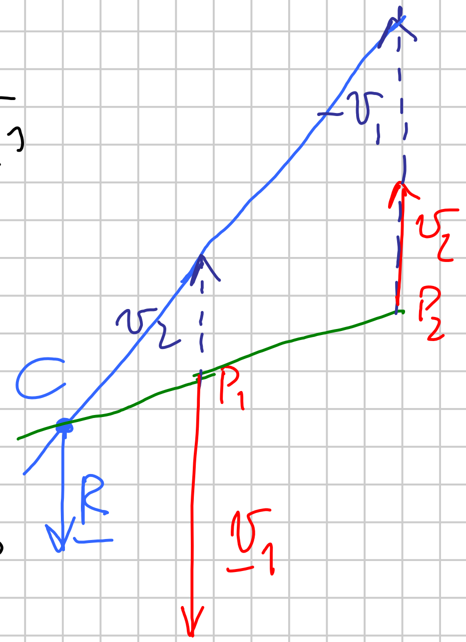
C divide P_1P_2 in parti inversamente proporzionali a $|\underline{v}_1|$ e $|\underline{v}_2|$

$$\frac{\overline{P_1C}}{\overline{P_2C}} = \frac{|\underline{v}_2|}{|\underline{v}_1|}$$

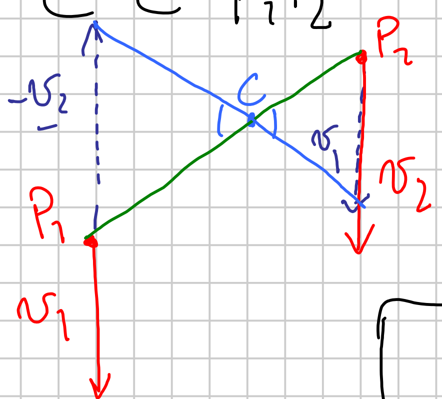
Vettori discordi

$|\underline{v}_1| > |\underline{v}_2|$ $\quad$ $\hat{u}$ diretto come $\underline{v}_1$

$$OC = \frac{|\underline{v}_1|\,OP_1 - |\underline{v}_2|\,OP_2}{|\underline{v}_1| - |\underline{v}_2|}$$



$C \in P_1P_2$ esterno al segmento

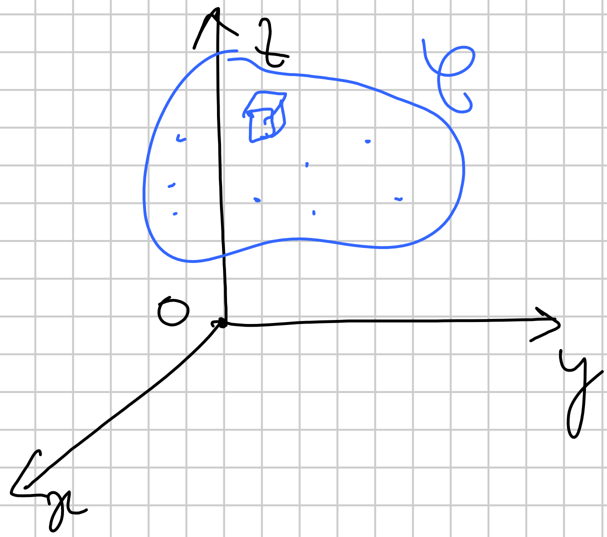


Tutti e 2 i vettori devono essere invertiti di posto!

CINEMATICA

Sistema di riferimento $\mathcal{R}$

Corpo $\mathcal{C}$ → formato da tanti punti (dotati di massa)



Compito della cinematica è di descrivere la posizione di ciascuno dei punti che costituiscono $\mathcal{C}$ nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$ e vedere se tali posizioni variano nel tempo e come variano.

MOTO → variazione della posizione dei punti di $\mathcal{C}$ rispetto a $\mathcal{R}$ nel tempo

POSIZIONE di $\mathcal{C}$ = (vettore) coordinate di ciascun punto che costituisce $\mathcal{C}$ nel sistema $\mathcal{R}$

TEMPO = esiste il tempo assoluto = parametro continuo che scorre senza interruzioni e che è lo stesso per tutti gli osservatori (approssimazione che va bene per velocità "basse" << velocità della luce)

CINEMATICA = descrizione geometrica del moto di un corpo

Caso più semplice: $\mathcal{C}$ è costituito da un solo punto

- Basta dare informazioni su un solo semplice ente geometrico
- in alcuni casi un corpo esteso può essere approssimato da un punto
- i corpi estesi possono essere immaginati come costituiti da sistemi di punti

MECCANICA NON RELATIVISTICA $v \ll c$

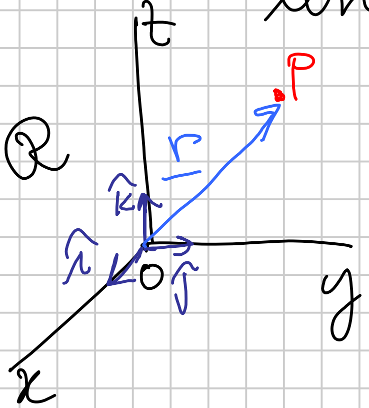
RELATIVITÀ GALILEIANA

$\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}^*$ 2 sdr in moto uno rispetto all'altro

$\Delta t = \Delta t^*$ (è falso in Mecc. relativistica)

∃ un tempo universale solo in meccanica classica.

$\Delta \ell = \Delta \ell^*$ non c'è effetto di variazione delle lunghezze (anche questo è falso in Mecc. Relativistica).



P si muove in $\mathcal{R}$

O è un'origine "fissa"

OP oppure $\underline{r}$ identifica la posizione di P

OP(t) oppure $\underline{r}(t)$ moto del punto P

$$\underline{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

componenti cartesiane di $\underline{r}$

$$\begin{cases} x = \boxed{x}(t) \\ y = \boxed{y}(t) \\ z = \boxed{z}(t) \end{cases}$$

numeri — funzioni

LEGGI ORARIE DEL MOTO

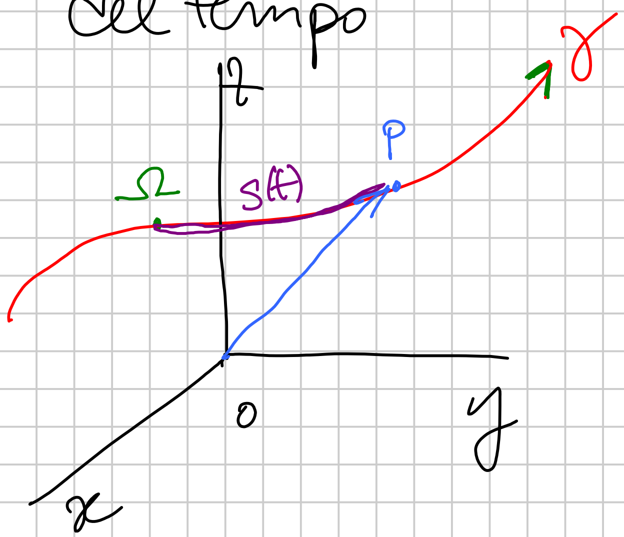
equazioni orarie cartesiane del moto

$y = f(x)$

LA CURVA descritta dalla punta di OP si chiama TRAIETTORIA γ di P

$OP(s) = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j} + z(s)\hat{k}$ parametrizzazione naturale di γ

$s = s(t)$ è la legge oraria che fornisce l'ascissa curvilinea di P su γ in funzione del tempo



$OP = x(s(t))\hat{i} + y(s(t))\hat{j} + z(s(t))\hat{k}$

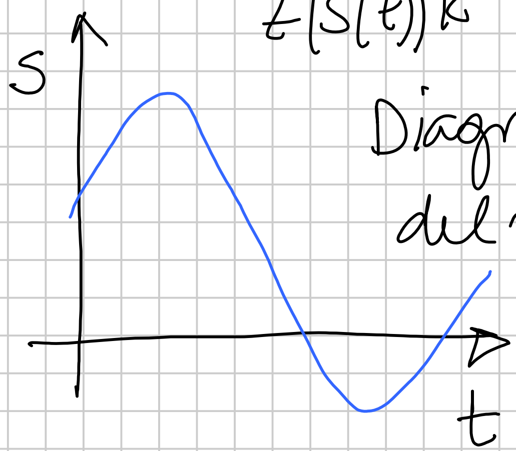


Diagramma orario del moto di P

Derivare rispetto al tempo si indica con un puntino posto sopra la funzione da derivare

$\frac{dx}{dt}$ si indica con $\dot{x}$

VELOCITÀ

$OP(t)$

$$\underline{v} = \frac{d\,OP(t)}{dt} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{r}}$$

$$\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ INDIPENDENTI DAL TEMPO

$$\underline{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\underline{v} = \frac{d}{dt}\left[OP(s(t))\right] = \frac{dOP}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s}\hat{t}$$

espressione intrinseca della velocità

$\frac{dOP}{ds} \to \hat{t}$ versore tangente a γ nel punto P

$\underline{v}$ ha la stessa direzione di $\hat{t}$

ha lo stesso verso di $\hat{t}$ se $\dot{s} > 0$

ha verso opposto a $\hat{t}$ se $\dot{s} < 0$

$$|\underline{v}| = |\dot{s}\hat{t}| = |\dot{s}| \cdot \underbrace{|\hat{t}|}_{=1} = |\dot{s}| \longrightarrow |\underline{v}| = |\dot{s}|$$

il modulo di $\underline{v}$ è uguale al valore assoluto di $\dot{s}$

$\dot{s}$ è detto velocità scalare

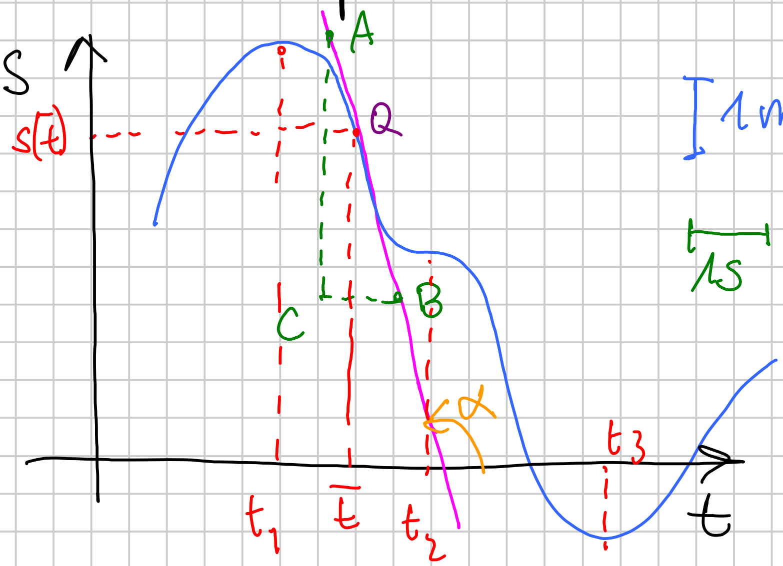
Velocità scalare media fra t e t'

$$v_m = \frac{s(t) - s(t')}{t - t'} \qquad \dot{s}(t) = \lim_{t' \to t} \frac{s(t) - s(t')}{t - t'}$$

Differenziale di s $\qquad ds = \frac{ds}{dt} \cdot dt = \dot{s}(t)\,dt =$

lunghezza infinitesima dell'arco di curva γ percorsa dal punto P nell'intervallo di tempo infinitesimo compreso fra gli istanti t e $t + dt$

$$|\dot{s}| = \frac{\text{lunghezza di tale arco infinitesimo}}{\text{tempo infinitesimo impiegato per percorrere tale arco}}$$



1 metro

$a = \dfrac{1m}{1cm}$

1s

$\tau = \dfrac{1s}{1cm}$

$\dot{s}(t_1) = \dot{s}(t_2) = \dot{s}(t_3) = 0$

punti di arresto istantaneo

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{CA}{BC} = \dfrac{AC}{CB}$ lunghezze prese col segno

$$\dot{s} = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \frac{a}{\tau}$$

t_1 e t_3 sono istanti di tempo di inversione del moto

$(t_1 - \delta, t_1)$

$\exists$ un intorno sinistro di t_1 in cui $\dot{s} > 0$

$\exists$ un intorno destro di t_1 in cui $\dot{s} < 0$

$(t_1, t_1 + \delta')$

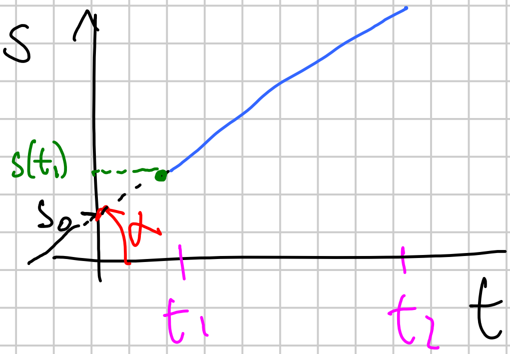
all'istante t_2 il moto si arresta, ma non si inverte

Se s cresce con t il moto di P è progressivo

Se s diminuisce al crescere di t, il moto è retrogrado

Se $\dot{s}$ = costante = $\dot{s}_0$ in un intervallo di tempo allora il moto di P è detto UNIFORME

$$s(t) = \dot{s}_0 \cdot t + s_0$$



$$s(t) = \dot{s}_0 (t - t_1) + s(t_1)$$

$$\dot{s}_0 = \mathrm{tg}\alpha \cdot \frac{1}{\tau} \quad \forall t \in (t_1, t_2)$$

$\underline{v} = \dot{s}_0 \hat{t}$ non è detto che $\underline{v}$ sia un vettore costante!