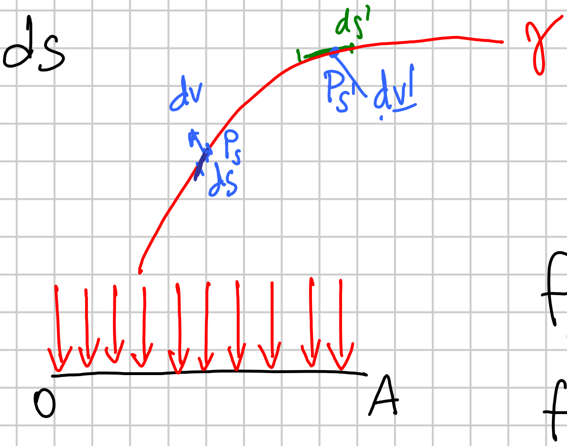
SISTEMI DI VETTORI DIPENDENTI

Titolo nota 09/10/2012

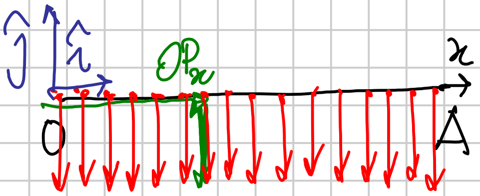
DA UN PARAMETRO CONTINUO

$$\sum (P_i, \underline{v}_i) \quad i = 1 \dots n$$

$n \to \infty$ ad ogni punto P_s indicizzato da un parametro s associamo un vettore $d\underline{V}_s = [f_x(s)\hat{i} + f_y(s)\hat{j} + f_z(s)\hat{k}]ds$



$|OA| = \ell$



$f_x = 0 \quad f_y = -\alpha$

$f_z = 0$

$d\underline{v}(x) = -\alpha\hat{j}\,dx$

$0 \le x \le \ell$

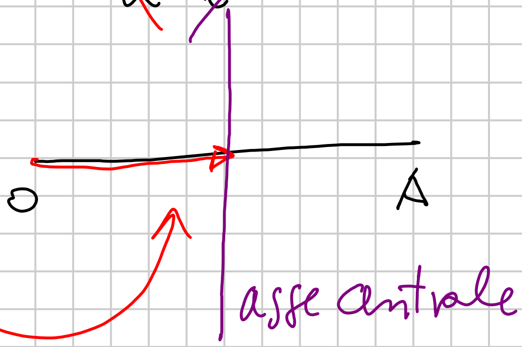
$$\underline{R} = \int_0^\ell -\alpha\hat{j}\,dx = -\alpha\ell\hat{j}$$

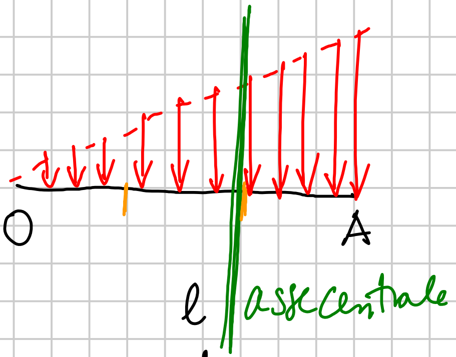
$$\underline{M}_O = \int_0^\ell x\hat{i} \wedge (-\alpha\hat{j}\,dx) = -\alpha\int_0^\ell x\,dx(\hat{i}\wedge\hat{j}) = -\frac{\alpha\ell^2}{2}\hat{k}$$

Asse centrale $P \in$ asse centrale

$$OP = \lambda\hat{j} + \frac{\underline{R}\wedge\underline{M}_O}{|\underline{R}|^2} = \lambda\hat{j} + \frac{-\cancel{\alpha}\ell\hat{j}\wedge\left(-\cancel{\alpha}\frac{\ell^{\cancel{2}}}{2}\right)\hat{k}}{\cancel{\alpha^2}\cancel{\ell^2}} =$$

$$= \lambda\hat{j} + \frac{\ell}{2}(\hat{j}\wedge\hat{k}) = \lambda\hat{j} + \boxed{\frac{\ell}{2}\hat{i}}$$





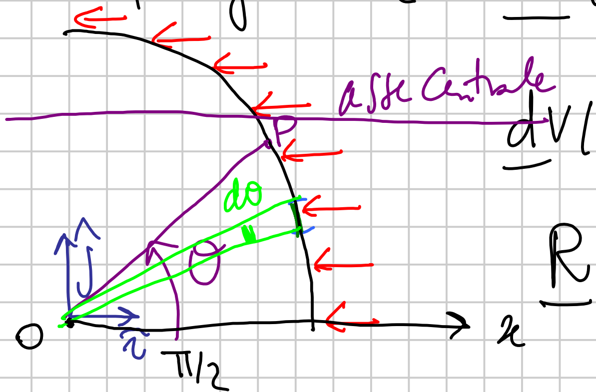
$$\underline{dV}(x) = -\alpha x \hat{j}\, dx$$

$$\underline{R} = \int_0^{\ell} \underline{dv}(x) = \int_0^{\ell} -\alpha x \hat{j}\, dx = -\alpha \hat{j} \frac{\ell^2}{2}$$

$$\underline{M}_0 = \int_0 x \hat{i} \wedge (-\alpha x \hat{j}) = -\alpha \int_0^{\ell} x^2 dx\, \hat{k} = -\frac{\alpha}{3} \ell^3 \hat{k}$$

$$OP = \lambda \hat{j} + \frac{\frac{\cancel{\alpha^2} \ell^5}{6} \hat{i}}{\cancel{\alpha^2} \ell^4/4} = \lambda \hat{j} + \frac{2}{3} \ell \hat{i}$$

Caso più generale $\underline{dV}(x) = -\alpha x^n \hat{j}\, dx$



$$\underline{dV}(\theta) = -\alpha R d\theta \hat{i}$$

$$OP = R\cos\theta \hat{i} + R \sin\theta \hat{j}$$

$$\underline{R} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underline{dV}(\theta) = -\frac{\alpha R \pi}{2} \hat{i}$$

$$\underline{M}_0 = \int_0^{\pi/2} R(\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) \wedge (-\alpha R d\theta \hat{i}) =$$

$$= +\alpha R^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta\, \hat{k} = \alpha R^2 [-\cos\theta]_0^{\pi/2} \hat{k} = \alpha R^2 \hat{k}$$

$$OP = \lambda \hat{i} + \frac{-\frac{\cancel{\alpha} R \pi}{2} \cancel{\alpha} R^2 (\hat{i} \wedge \hat{k})}{\frac{\cancel{\alpha^2} R^2 \pi^2}{4}} = \lambda \hat{i} + \frac{2R}{\pi} \hat{j}$$

ESPRESSIONE INTRINSECA DELLA VELOCITÀ

$$\underline{v} = \dot{s} \hat{t}$$

Se $\dot{s}$ = costante $= \dot{s}_0$, allora $\underline{v} = \dot{s}_0 \hat{t}$ descrive un moto UNIFORME, se $\dot{s} \neq$ costante il moto è detto VARIO

Se $\hat{t}$ è un versore costante allora il moto di P è detto RETTILINEO

$\underline{v}$ = costante durante (t_1, t_2) $\Leftrightarrow$ $\dot{s}\hat{t}$ = costante in (t_1, t_2)

$\Leftrightarrow$ $\dot{s} = \dot{s}_0$; $\hat{t}$ = costante in (t_1, t_2) → MOTO RETTILINEO UNIFORME

ACCELERAZIONE

1 sola L   1 sola Z

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \dot{\underline{v}} \qquad \underline{v} = \frac{dOP}{dt} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{r}}$$

$$\underline{a} = \frac{d^2 OP}{dt^2} = \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \ddot{\underline{r}}$$

$$\underline{r} = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$

VERSORI "FISSI" (non dipendono dal tempo)

$$\underline{a} = \ddot{x}(t)\hat{\imath} + \ddot{y}(t)\hat{\jmath} + \ddot{z}(t)\hat{k}$$

espressione di $\underline{a}$ in componenti cartesiane

Come si fa a ottenere le componenti di $\underline{a}$ lungo le direzioni dei versori della terna intrinseca?

$$\underline{v} = \dot{s}\hat{t} \qquad \underline{a} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\hat{t}) = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\frac{d\hat{t}(s(t))}{dt} =$$

$$= \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\frac{d\hat{t}}{ds}\boxed{\frac{ds}{dt}}^{=\dot{s}} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\boxed{\frac{d\hat{t}}{ds}} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{R_C}\hat{n}$$

1ª di FRENET

$\underline{a}$ non ha componenti lungo $\underline{b}$ $\underline{\underline{\text{MAI}}}$

$\underline{a} \in$ piano osculatore

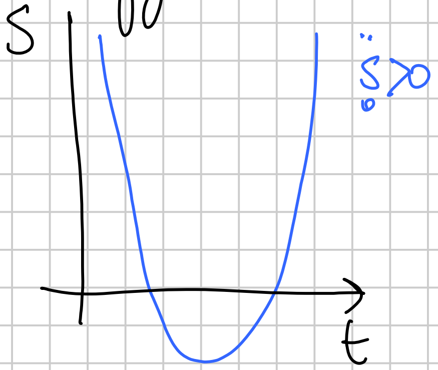
Se $\ddot{s}=0$ $\dot{s} = \underset{}{\overset{\text{nell'intervallo } (t_1, t_2)}{\text{costante}}} = \dot{s}_0$ il moto è uniforme qualunque sia la traiettoria, ma $\underline{a} \neq 0$

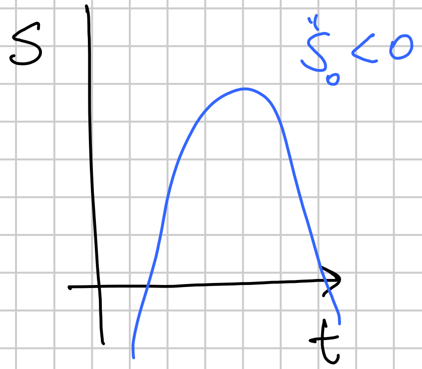
$$\underline{a} = \frac{\dot{s}_0^2}{R_c(t)} \hat{n}$$ che non è nulla !!!

$\ddot{s} = \text{costante} = \ddot{s}_0$ $\dot{s}(t) = \ddot{s}_0 (t-t_1) + \dot{s}(t_1)$

$$s(t) = \frac{1}{2} \ddot{s}_0 (t-t_1)^2 + \dot{s}(t_1)(t-t_1) + s(t_1)$$

legge oraria del moto uniformemente accelerato





accelerazione scalare media

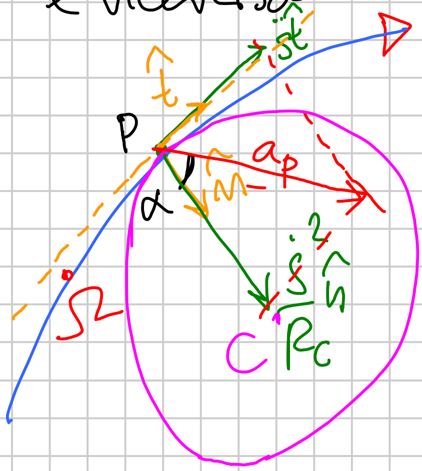
$$a_m = \frac{\dot{s}(t_2) - \dot{s}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\underline{a} = \underset{\underset{\underline{a_t}}{\uparrow}}{\ddot{s}\hat{t}} + \underset{\underset{\underline{a_n}}{\uparrow}}{\frac{\dot{s}^2}{R_c}\hat{n}}$$

Quando si annulla $\underline{a_n}$?

$\dot{s}=0$ oppure $c = \frac{1}{R_c} = 0$ che accade nelle traiettorie rettilinee oppure nei punti di flesso della traiettoria.

Se $\underline{a}_n \equiv \underline{0}$ in un intervallo di tempo (t_1, t_2) allora il moto è necessariamente rettilineo e viceversa



se immaginiamo $(P, \underline{a})$

$\underline{a}_p \in$ al piano generato da $\hat{t}_p$ e $\hat{n}_p$

α Angolo fra $\underline{a}_p$ e $\hat{n}_p$

$\hat{t} \cdot \hat{n} = 0$

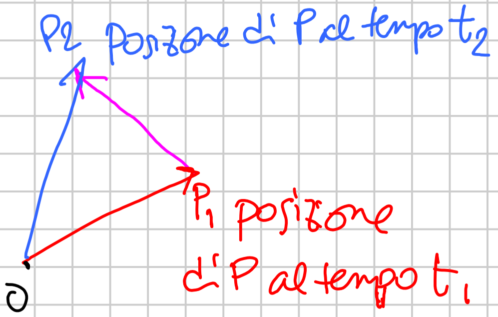
$$\cos\alpha = \frac{\underline{a}_p \cdot \hat{n}}{|\underline{a}_p|} = \frac{\dot{s}^2/R_c}{\sqrt{\ddot{s}^2 + \dot{s}^4/R_c^2}} \geq 0$$

α è un angolo acuto

SPOSTAMENTO

$OP(t)$ t_1, t_2 $OP(t_1)$ $OP(t_2)$

2 posizioni a 2 istanti di tempo distinti



$OP_2 - OP_1 = P_1P_2$

= spostamento finito

t $t' = t + dt$

$\Delta P = OP(t+dt) - OP(t)$ $\boxed{\text{(si fa un'approssimazione)}}$

$$\simeq \cancel{OP(t)} + \underbrace{\left.\frac{dOP}{dt}\right|_t}_{\underline{v}_p(t)} dt + o(dt) - \cancel{OP(t)}$$

$\Delta P = \underline{v}_p(t)dt + o(dt)$ $\underline{v}_p \neq \underline{0}$

$dP = \underline{v}_P(t)\,dt$ spostamento elementare o infinitesimo

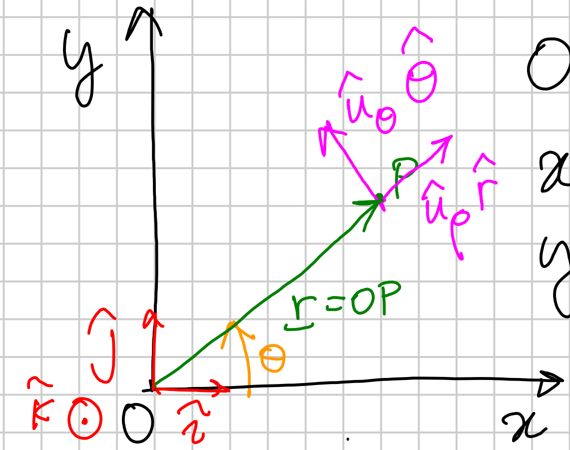
Cosa succede se $\underline{v}_P = \underline{0}$? Il 1° ordine dello sviluppo di Taylor non contribuisce, bisogna sviluppare fino al 2° ordine

$$dP = \cancel{\underline{v}_P(t)\,dt} + \frac{1}{2}\underline{a}(t)(dt)^2 + \dots$$

$$dP = \frac{1}{2}\underline{a}(t)(dt)^2$$ Spostamento infinitesimo incipiente

---

MOTI CHE AVVENGONO SU UN PIANO



$OP(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{j}$ $z = 0$

x = ascissa di P

y = ordinata di P

$$|OP| = |\underline{r}| = \rho \geq 0$$

θ è l'angolo fra il semiasse positivo delle x e la semiretta OP misurato dall'asse "fisso" alla semiretta mobile in modo che il verso di rotazione antioraria (con $\hat{k}$ che punta verso l'osservatore) sia quello positivo

$$\underbrace{\rho(t) \qquad \theta(t)}_{\downarrow} \qquad \begin{cases} x = \rho(t)\cos(\theta(t)) \\ y = \rho(t)\,\mathrm{sen}(\theta(t)) \end{cases}$$

eliminare t $\Rightarrow$ $\rho(\theta)$ equazione della traiettoria in

coordinate polari

$\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{k}$ devono formare una terna destrorsa

$$\hat{r} = \frac{OP}{\rho} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \text{sen}\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{\theta} = \hat{k}\wedge\hat{r} = -\text{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}^{\,*}$$

dipendono da t

$$\begin{cases} \hat{\imath} = \cos\theta\,\hat{r} - \text{sen}\theta\,\hat{\theta} \\ \hat{\jmath} = \text{sen}\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta} \end{cases}$$

$$\theta = \theta(t)$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\cos\theta\,\hat{\imath} + \frac{d}{dt}\text{sen}\theta\,\hat{\jmath} =$$

$$-\dot{\theta}\,\text{sen}\theta\,\hat{\imath} + \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\jmath} =$$

$$= \dot{\theta}(-\text{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})^{*} = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d}{dt}(-\text{sen}\theta)\,\hat{\imath} + \frac{d}{dt}\cos\theta\,\hat{\jmath} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\imath} - \dot{\theta}\,\text{sen}\theta\,\hat{\jmath} =$$

$$= -\dot{\theta}\hat{r}$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$$

$$OP = \rho\hat{r} \rightarrow \underline{v}_p = \frac{dOP}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\hat{r}) =$$

$$= \underbrace{\dot{\rho}\hat{r}}_{\text{velocità radiale}} + \underbrace{\rho\dot{\theta}\hat{\theta}}_{\text{velocità tangenziale}}$$

$\underline{v} = \dot{s}\hat{t}$ NON CONFONDERE !

$\hat{\theta}$ in generale non è tangente alla traiettoria

$v_\rho = \dot{\rho}$ $\quad v_\theta = \rho\dot{\theta}$ le componenti della velocità

la componente radiale

la componente tangenziale

ACCELERAZIONE

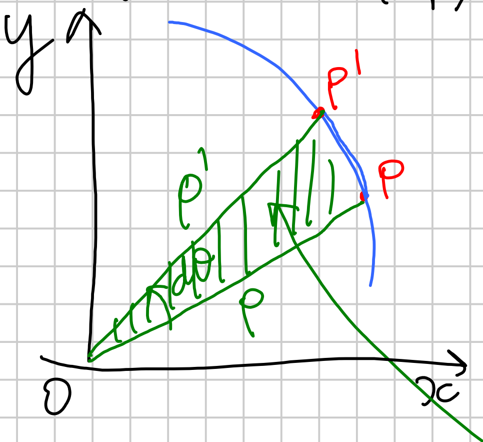
$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot\rho\hat r + \rho\dot\theta\hat\theta\right) = \ddot\rho\hat r + \dot\rho\dot\theta\hat\theta + \boxed{\dot\rho\dot\theta\hat\theta + \rho\ddot\theta\hat\theta - \rho\dot\theta^2\hat r}$$

$$\underline{a} = \underbrace{\left(\ddot\rho - \rho\dot\theta^2\right)\hat r}_{\text{accelerazione radiale}} + \underbrace{\left(2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta\right)\hat\theta}_{\text{accelerazione trasversale}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot\theta\right) = 2\rho\dot\rho\dot\theta + \rho^2\ddot\theta \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot\theta\right) = 2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta$$

$$\underline{a} = \left(\ddot\rho - \rho\dot\theta^2\right)\hat r + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot\theta\right)\hat\theta$$

VELOCITA AREOLARE



"triangolo" OPP' $\quad \rho \simeq \rho'$

"base" $= \overset{\frown}{PP'} \simeq \rho\, d\theta$

"altezza" $\simeq \rho$

$$dA = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

dt = intervallo di tempo infinitesimo durante il quale il punto passa dalla posizione P alla posizione P'

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\frac{d\theta}{dt} \qquad \dot A = \frac{1}{2}\rho^2\dot\theta$$ velocità areolare di P rispetto ad O

$OP \quad \underline{v}_P$

$$OP \wedge \underline{v}_P = (\rho\hat{r}) \wedge (\dot{\rho}\hat{r} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}) = \rho^2\dot{\theta}\hat{k} = 2\dot{A}\hat{k}$$

A meno del segno $\dot{A} = \frac{1}{2}|OP \wedge \underline{v}_P|$

$\dot{A} = \frac{1}{2}(OP \wedge v_p)\cdot\hat{k}$ $\hat{k}$ è il vettore ⊥ al piano su cui avviene il moto

Se il moto avviene sul piano $ax+by+cz+d=0$ si deve prendere $\hat{g} = \frac{a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Nel piano xy $OP = x\hat{i}+y\hat{j}$ $\underline{v}_p = \dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}$

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(OP \wedge \underline{v}_p)\cdot\hat{k} = \frac{1}{2}[(x\dot{y}-y\dot{x})\hat{k}]\cdot\hat{k} =$$

$= \frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})$ solo se il moto avviene nel piano xy (z = costante)

$$\underline{a}_t = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\underbrace{\rho^2\dot{\theta}}_{\uparrow 2\dot{A}})\hat{\theta} \qquad \underline{a}_t = \frac{2}{\rho}\dot{A}\hat{\theta}$$

MOTI CENTRALI

Un moto è detto centrale se $\forall t \in (t_1, t_2)$ il vettore $\underline{a}_p$ passa per un punto fisso O $OP \parallel \underline{a}_p$

$$OP \wedge \underline{a}_p = \underline{0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(OP \wedge \underline{v}_p\right) = \underbrace{\frac{dOP}{dt}}_{\underline{v}_p} \wedge \underline{v}_p + OP \wedge \underbrace{\frac{d\underline{v}_p}{dt}}_{\underline{a}_p} =$$

$$\cancel{\underline{v}_p \wedge \underline{v}_p} + OP \wedge \underline{a}_p$$

$$\frac{d}{dt}\left(OP \wedge \underline{v}_p\right) = OP \wedge \underline{a}_p$$

Se voglio un moto centrale $OP \wedge \underline{a}_p = \underline{0}$, quindi

$$\frac{d}{dt}\left(OP \wedge \underline{v}_p\right) = \underline{0} \qquad OP \wedge \underline{v}_p = \underline{h} = \text{vettore costante}$$

$\hat{h}$ è ⊥ al piano del moto di P

(oppure il moto di P è rettilineo)