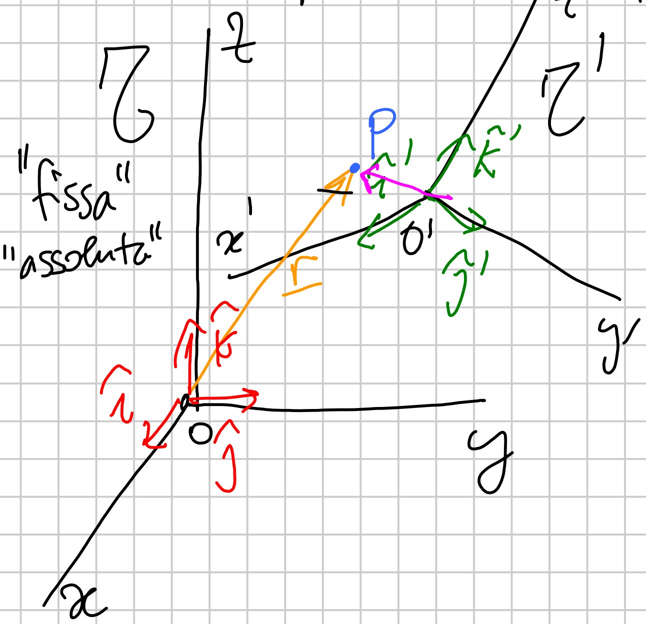
MOTI RELATIVI DI UN PUNTO

Titolo nota 17/10/2012

(composti)



P è un punto in moto nello spazio

$$OP(t) = \underline{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$

$$\hat{\imath}' = \alpha_1(t)\hat{\imath} + \beta_1(t)\hat{\jmath} + \gamma_1(t)\hat{k}$$

$$\hat{\jmath}' = \alpha_2(t)\hat{\imath} + \beta_2(t)\hat{\jmath} + \gamma_2(t)\hat{k}$$

$$\hat{k}' = \alpha_3(t)\hat{\imath} + \beta_3(t)\hat{\jmath} + \gamma_3(t)\hat{k}$$

$\alpha_1(t) = \hat{\imath}\cdot\hat{\imath}'$ e così via

τ = terna "fissa" o "assoluta"

τ' = terna "mobile" o "relativa"

$$O'P = x'(t)\hat{\imath}' + y'(t)\hat{\jmath}' + z'(t)\hat{k}' = \underline{r}'$$

moto "assoluto" di P nella terna τ (coordinate x, y, z)

moto "relativo" di P nella terna τ' (coordinate x', y', z')

POSIZIONE $\quad OP = OO' + O'P$

$$\underline{r} = OO' + \underline{r}'$$

↑ posizione di O' nella terna τ

$$\underline{r} = OO' + x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' + z'\hat{k}'$$

VELOCITÀ

$$\underline{v}_P^{(a)} = \frac{dOP}{dt} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{dOO'}{dt} + \frac{d\underline{r}'}{dt} =$$

$$= \frac{dOO'}{dt} + \frac{d}{dt}\left(x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'\right) =$$

$$= \underbrace{\underline{V}_{O'} + x' \cdot \frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z' \cdot \frac{d\hat{k}'}{dt}}_{\text{VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO}} + \underbrace{\dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}'}_{v_P^{(r)}}$$

velocità di O' rispetto ad O

VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO

è la velocità di un punto ("fittizio" o geometrico) solidale a Σ' (fermo rispetto a Σ') e che coincide con P (è sovrapposto a P all'istante t) nell'istante di tempo in cui si calcolano le derivate dei versori

$$\hat{i}' = \alpha_1(t)\,\hat{i} + \beta_1(t)\,\hat{j} + \gamma_1(t)\,\hat{k}$$

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \frac{d\alpha_1(t)}{dt}\hat{i} + \frac{d\beta_1(t)}{dt}\hat{j} + \frac{d\gamma_1(t)}{dt}\hat{k}$$

$$\underline{v}_P^{(a)} = \underline{v}_P^{(r)} + \underline{v}_P^{(tr)}$$

Ad ogni istante di tempo, la velocità "assoluta" di P è = alla somma della velocità "relativa" di P e della velocità di trascinamento di P

ACCELERAZIONE

$$\frac{d}{dt}\underline{v}_P^{(a)} = \frac{d}{dt}\left(\underline{v}_P^{(tr)} + v_P^{(r)}\right) = \left(\frac{d\underline{v}_{O'}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}\right)\right) +$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\dot{x}'\hat{i}'+\dot{y}'\hat{j}'+\dot{z}'\hat{k}'\right)=\underline{a}_{0'}+x'\frac{d^2\hat{i}'}{dt^2}+y'\frac{d^2\hat{j}'}{dt^2}+z'\frac{d^2\hat{k}'}{dt^2}+$$

$$+\dot{x}'\frac{d\hat{i}'}{dt}+\dot{y}'\frac{d\hat{j}'}{dt}+\dot{z}'\frac{d\hat{k}'}{dt}+\dot{x}'\frac{d\hat{i}'}{dt}+\dot{y}'\frac{d\hat{j}'}{dt}+\dot{z}'\frac{d\hat{k}'}{dt}+$$

$$+\ddot{x}'\hat{i}'+\ddot{y}'\hat{j}'+\ddot{z}'\hat{k}'=$$

$$\underbrace{\boxed{\left(\underline{a}_{0'}+x'\frac{d^2\hat{i}'}{dt^2}+y'\frac{d^2\hat{j}'}{dt^2}+z'\frac{d^2\hat{k}'}{dt^2}\right)}}_{\text{ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO}}+2\underbrace{\left(\dot{x}'\frac{d\hat{i}'}{dt}+\dot{y}'\frac{d\hat{j}'}{dt}+\dot{z}'\frac{d\hat{k}'}{dt}\right)}_{\text{ACCELERAZ. DI CORIOLIS}}$$

$$\underbrace{+\left(\ddot{x}'\hat{i}'+\ddot{y}'\hat{j}'+\ddot{z}'\hat{k}'\right)}_{\text{ACCELERAZ. RELATIVA}}$$

$$\boxed{\underline{a}_P^{(a)}=\underline{a}_P^{(tr)}+\underline{a}_P^{(co)}+\underline{a}_P^{(r)}}$$

TEOREMA DI COMPOSIZIONE DELLE ACCELERAZIONI

Σ' è in moto rettilineo uniforme rispetto a Σ

$\underline{V}_{0'}=$ costante $\qquad \hat{i}'=\hat{i} \quad \hat{j}'=\hat{j} \quad \hat{k}'=\hat{k}$

oppure $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ non dipendono da t

$\underline{a}_{0'}=\underline{0}$

$\frac{d\hat{i}'}{dt}, \frac{d\hat{j}'}{dt}, \frac{d\hat{k}'}{dt}$ sono tutte identicamente nulle

$\underline{a}_P^{(a)}=\underline{a}_P^{(r)}$ per quanto riguarda le accelerazioni Σ' è identica a Σ

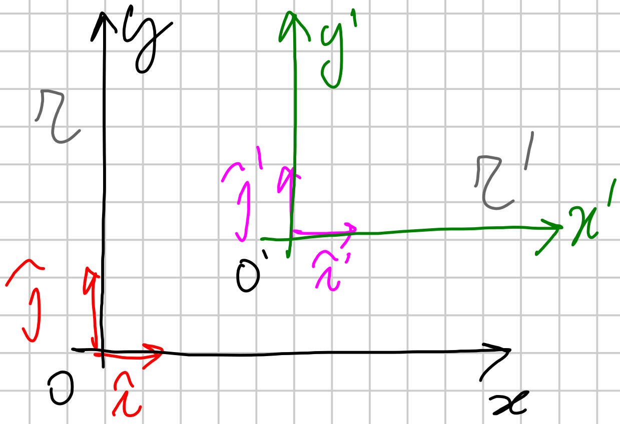
Manteniamo fissi $\hat{\imath}'\hat{\jmath}'\hat{k}'$ rispetto a $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ ($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ non dipendono da t) ma lasciamo muovere liberamente O'

MOTO DI P relativamente a O'

$$\underline{v}_P^{(t)} = \underline{v}_{O'} \quad \forall P \qquad \underline{v}_P^{(a)} = \underline{v}_{O'} + \underline{v}_P^{(r)}$$

$$\underline{a}_P^{(t)} = \underline{a}_{O'} \quad \forall P \qquad \underline{a}_P^{(a)} = \underline{a}_{O'} + \underline{a}_P^{(r)} \quad \text{NON C'È } \underline{a}^{(co)}$$

ESERCIZIO DI CINEMATICA RELATIVA 2D



$\hat{\imath}' = \hat{\imath} \quad \hat{\jmath}' = \hat{\jmath}$

$x_{O'} = v \cdot t$

$y_{O'} = R$

Punto P che compie un Moto Circolare Uniforme in Σ'

$$\begin{cases} x_P' = R\,\text{sen}(-\omega t) \\ y_P' = -R\cos(-\omega t) \end{cases}$$

$\omega > 0$

$-\omega < 0$

l'osservatore in Σ' vede P girare in senso "orario"

al tempo $t=0$ $P \equiv O$

$$OP = OO' + O'P =$$

$$= (vt\,\hat{\imath} + R\hat{\jmath}) + (R\,\text{sen}(-\omega t)\,\overset{=\hat{\imath}}{\hat{\imath}'} - R\cos(-\omega t)\,\overset{=\hat{\jmath}}{\hat{\jmath}'})$$

$$= \big(vt - R\,\text{sen}(\omega t)\big)\hat{\imath} + \big(R - R\cos(\omega t)\big)\hat{\jmath}$$

$$\underline{v}_P^{(a)} = \big[v - \omega R\cos(\omega t)\big]\hat{\imath} + \omega R\,\text{sen}(\omega t)\,\hat{\jmath}$$

$$= \underbrace{v\hat{\imath}}_{\underline{v}^{(t)}} + \underbrace{\left(-\omega R\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + \omega R \,\mathrm{sen}(\omega t)\,\hat{\jmath}\right)}_{\underline{v}^{(r)}}$$

$$\underline{a}_p^{(a)} = +\omega^2 R\,\mathrm{sen}(\omega t)\,\hat{\imath} + \omega^2 R\cos(\omega t)\,\hat{\jmath} = \underline{a}_p^{(r)}$$

Può capitare che $\underline{v}_p^{(a)} = \underline{0}$?

$$\begin{cases} v - \omega R\cos(\omega t) = 0 \\ \omega R\,\mathrm{sen}(\omega t) = 0 \end{cases} \qquad \omega t = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad t_k = \frac{kT}{2}$$

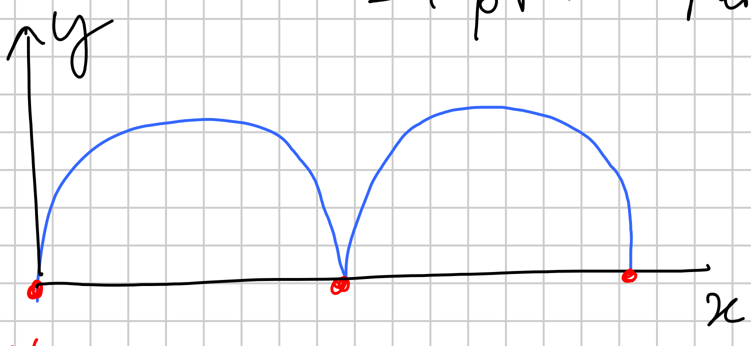
$$v - \omega R\cos(\omega t_k) = 0 \qquad v - \omega R\left(\cos(k\pi)\right) = 0$$

$\cos(k\pi)$: 1 per k pari, −1 per k dispari

$$v - \omega R(-1)^k = 0$$

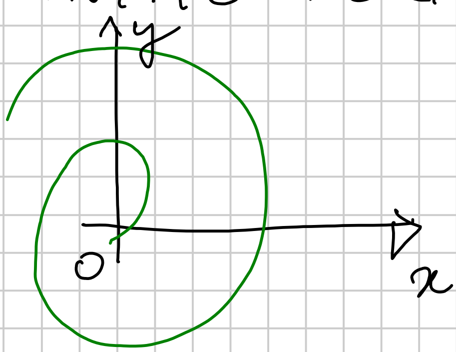
k pari $\quad v = \omega R \rightarrow$

k dispari $\quad v = -\omega R$



MOTO IN COORDINATE POLARI CENTRALE

$\rho = a\theta \qquad a > 0$



$$\rho^2\dot{\theta} = c$$

$$a^2\theta^2\dot{\theta} = c$$

$$t = 0 \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \quad \rho(0) = \rho_0 \quad \theta(0) = \theta_0 \quad c = \rho_0^2\dot{\theta}_0$$

$$a^2\theta^2\frac{d\theta}{dt} = c \qquad a^2\theta^2\,d\theta = c\,dt$$

$$a^2\int_{\theta_0}^{\theta(t)} \phi^2\,d\phi = c\int_0^t d\tau$$

$$a^2\left[\frac{\phi^3}{3}\right]_{\theta_0}^{\theta(t)} = ct \qquad [\theta(t)]^3 - \theta_0^3 = \frac{3ct}{a^2}$$

$$\theta(t) = \sqrt[3]{\frac{3ct}{a^2}+\theta_0^3} \qquad \rho(t) = a\cdot\theta(t) = a\sqrt[3]{\frac{3ct}{a^2}+\theta_0^3}$$

$$c = \rho_0^2\dot\theta_0 \qquad \begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos(\theta(t)) = a\sqrt[3]{\frac{3\rho_0^2\dot\theta_0 t}{a^2}+\theta_0^3}\,\cos\left(\sqrt[3]{\quad}\right) \\ y(t) = \rho(t)\,\mathrm{sen}(\theta(t)) = a\sqrt[3]{\quad}\,\sin\left(\sqrt[3]{\quad}\right) \end{cases}$$

$$\dot x, \dot y, \ddot x, \ddot y \dots$$

$$a_\rho = -\frac{c}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2(1/\rho)}{d\theta^2}\right) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{a\theta} \qquad \frac{d}{d\theta}(1/\rho) = -\frac{1}{a\theta^2}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(1/\rho) = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{1}{a\theta^2}\right) = +\frac{2}{a\theta^3}$$

$$a_\rho = -\frac{c}{a^2\theta^2}\left(\frac{1}{a\theta}+\frac{2}{a\theta^3}\right) = -\frac{\rho_0^2\dot\theta_0}{a^3\theta^3}\left(1+\frac{2}{\theta^2}\right) = -\frac{\rho_0^2\dot\theta_0}{a^3\theta^3}\left(\frac{\theta^2+2}{\theta^2}\right)$$

dipendente da θ

$$a_\rho(t) = \frac{-\rho_0^2\dot\theta_0}{a^3\left(\frac{3\rho_0^2\dot\theta_0}{a^2}t+\theta_0^3\right)}\left(1+\frac{2}{\left(\sqrt[3]{\quad}\right)^2}\right)$$

CINEMATICA DEI SISTEMI

$P \equiv (x, y, z)$ 1 solo punto, 3 coordinate

$P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ ... $P_n \equiv (x_n, y_n, z_n)$

$3n$ numeri per poter descrivere la configurazione di un sistema di n punti

INTRODUCIAMO DEI VINCOLI

le $3n$ coordinate non sono indipendenti fra di loro

CONDIZIONE DI RIGIDITÀ

$d(P_i, P_j)$ = costante che dipende solo da i e j $(i \neq j)$ e non dipende dal tempo.

$|P_i P_j|$ = costante

Se questa condizione vale per tutte le coppie (i, j) il sistema di punti si dice RIGIDO

MOTO RIGIDO = un moto del sistema di punti P_i tale che le distanze $|P_i P_j|$ restano costanti (invariate) nel tempo

---

VINCOLO DI POSIZIONE (OLONOMO)

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0$$ VINCOLO BILATERALE

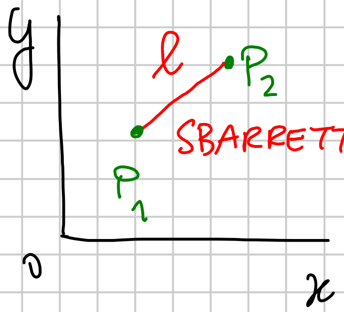
durante tutto l'intervallo di tempo in cui il moto avviene

$f(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2 \dots x_n,y_n,z_n,t) \geq 0$ ← vincolo unilaterale

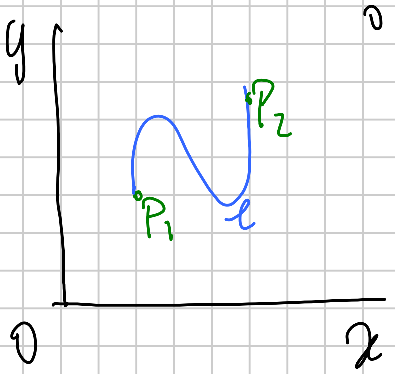
ESEMPIO 1 1 solo punto che si muove sulla superficie di una sfera avente centro O e raggio R

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0 \quad \forall t$$

ESEMPIO 2



$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-\ell^2=0$$



$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \leq \ell^2$$

$$\ell^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2 \geq 0$$

Quando t non compare esplicitamente nell'espressione di f si dice che i vincoli sono FISSI o STAZIONARI

Se t compare esplicitamente, il vincolo è DIPENDENTE DAL TEMPO

UN VINCOLO GEOMETRICO PROVOCA LIMITAZIONI SULLA VELOCITÀ DEI PUNTI

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

↓ derivo rispetto a t

$$\cancel{2}x\dot{x}+\cancel{2}y\dot{y}+\cancel{2}z\dot{z}=0$$

$$OP = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

$$\underline{v}_P = \dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}$$

$$x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}=0$$

$\hookrightarrow OP \cdot \underline{v}_P = 0$

$OP \perp \underline{v}_P$

Moto di P su una superficie di equazione

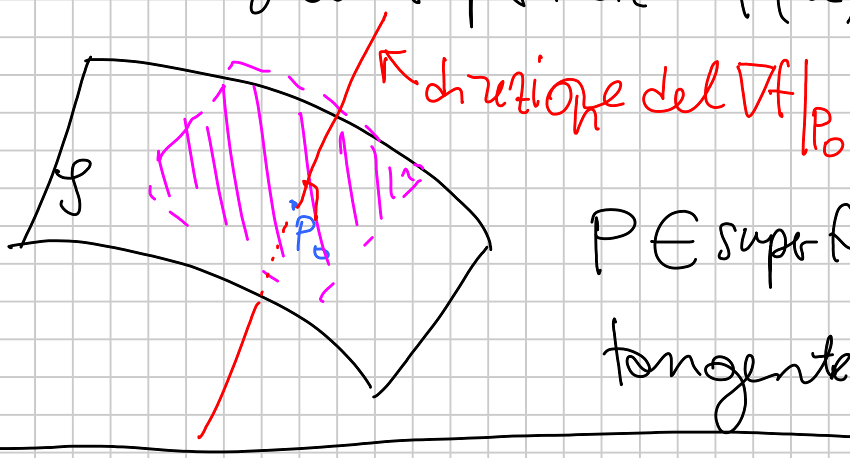
$f(x,y,z)=0$ $\qquad f(x(t),y(t),z(t))=0 \ \forall t$

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} \qquad P_0\equiv(x_0,y_0,z_0)$$

$$\underline{\nabla f}(P_0)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\hat{\imath}+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\hat{\jmath}+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0}\hat{k}$$

$$\underline{V}_{P_0}=\dot{x}_0\hat{\imath}+\dot{y}_0\hat{\jmath}+\dot{z}_0\hat{k} \qquad \underline{\nabla f}(P_0)\cdot\underline{v}_{P_0}=0$$

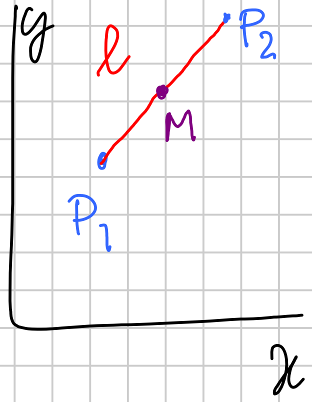
$\underline{\nabla f}\big|_{P_0}$ fornisce la direzione $\perp$ al piano tangente alla superficie $f(x,y,z)=0$ nel punto P_0



$P\in$ superficie $\mathcal{S} \Rightarrow \underline{V}_P\in$ piano tangente a $\mathcal{S}$ in P

CI SONO VINCOLI SULLE VELOCITÀ CHE NON SI OTTENGONO DERIVANDO RISPETTO AL TEMPO UNA FUNZIONE DELLE SOLE COORDINATE (VINCOLI NON OLONOMI O ANOLONOMI)

ESEMPIO



$|P_1P_2| = \ell$ OLONOMO

$\underline{v}_M \parallel P_1P_2$ $\quad \underline{v}_M \wedge P_1P_2 = \underline{0}$

ANOLONOMO

$$OP_1 = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} \qquad OP_2 = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath}$$

$$OM = \frac{OP_1 + OP_2}{2} = \frac{x_1+x_2}{2}\hat{\imath} + \frac{y_1+y_2}{2}\hat{\jmath}$$

$$\underline{v}_M = \frac{dOM}{dt} = \frac{1}{2}\left[(\dot{x}_1+\dot{x}_2)\hat{\imath} + (\dot{y}_1+\dot{y}_2)\hat{\jmath}\right]$$

$$P_1P_2 = (x_2-x_1)\hat{\imath} + (y_2-y_1)\hat{\jmath}$$

$$(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 - \ell^2 = 0 \qquad \text{OLONOMO}$$

$$(\dot{x}_1+\dot{x}_2)(y_2-y_1) - (\dot{y}_1+\dot{y}_2)(x_2-x_1) = 0 \qquad \text{ANOLONOMO}$$

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \sim x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{z}_1, \dots \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0$$

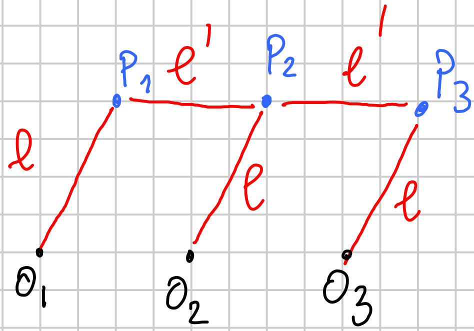
ESPRESSIONE GENERALE DI UN VINCOLO ANOLONOMO

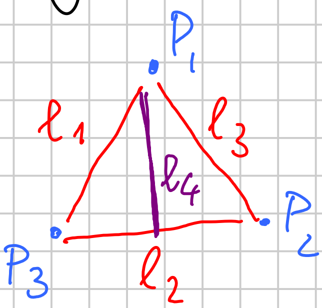
DATO UN SISTEMA DI N PUNTI MATERIALI con m vincoli geometrici

$$f_1(\text{-----}) = 0 \qquad f_2(\text{----}) = 0 \qquad f_m(\text{----}) = 0$$

definiamo numero di gradi di libertà (DOF) $= \ell$ il numero di coordinate INDIPENDENTI necessarie per descrivere UNIVOCAMENTE la posizione nello spazio di TUTTI gli N punti

$$\ell \geq 3N - m$$





$3\cdot 3 - 3 = 6$ DOF

$\cancel{3\cdot 3 - 4 = 5}$

$2\cdot 2 - 3 = 1$

$3\cdot 2 - 5$

Rifaremo il conto con le cerniere

$f_1(\ldots) = 0$

$f_2(\ldots) = 0$

$f_1 + f_2(\ldots) = 0$

$q_1 \ldots q_\ell$ descrivono la configurazione nello spazio del sistema di punti

$x_1 = f_1(q_1 \ldots q_\ell)$

$y_1 = g_1(q_1 \ldots q_\ell)$

$z_1 = h_1(q_1 \ldots q_\ell)$

$\vdots$

$x_n = f_n(q_1 \ldots q_\ell)$

$y_n = g_n(q_1 \ldots q_\ell)$

$z_n = h_n(q_1 \ldots q_\ell)$

$q_1 \ldots q_\ell$ dipenderanno da t

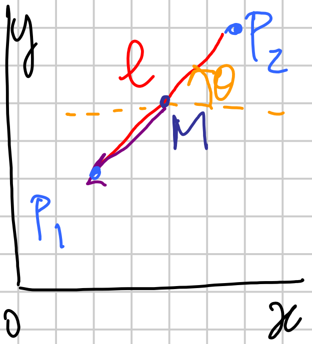
PARAMETRI LAGRANGIANI O COORDINATE GENERALIZZATE

$q_1 = r_1(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n y_n z_n)$

$q_2 = r_2(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n y_n, z)$

$\vdots$

$q_\ell = r_\ell(\quad)$



Nel piano $\quad N=2$

$DOF = \ell \geq 2\cdot 2 - 1 = 3$

$\ell = 3$ sono sufficienti!

$P_1 \equiv (x_1, y_1) \qquad P_2 \equiv (x_2, y_2)$

$$OP_1 = OM + MP_1 = (x_M \hat{\imath} + y_M \hat{\jmath}) - \frac{\ell}{2}(\cos\theta \hat{\imath} + \sin\theta \hat{\jmath})$$

$$OP_2 = OM + MP_2 = (x_M \hat{\imath} + y_M \hat{\jmath}) + \frac{\ell}{2}(\cos\theta \hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta \hat{\jmath})$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\begin{cases} x_1 = x_M - \frac{\ell}{2}\cos\theta \\ y_1 = y_M - \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_M + \frac{\ell}{2}\cos\theta \\ y_2 = y_M + \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x_2 - x_1}{\ell} \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{y_2 - y_1}{\ell} \end{aligned}\right\} \rightarrow \theta$$

$$OP_i = x_i(t)\hat{\imath} + y_i(t)\hat{\jmath} + z_i(t)\hat{k} \qquad i = 1 \ldots N$$

$$OP_i = \underline{f_i}(q_1 \ldots q_\ell, t)$$ N relazioni di questo tipo

$$\underline{OP_i} = x_i(q_1(t) \ldots q_\ell(t), t)\hat{\imath} + y_i(q_1(t) \ldots q_\ell(t), t)\hat{\jmath} + z_i(q_1(t) \ldots q_\ell(t), t)\hat{k}$$

Noti $q_1(t) \dots q_l(t)$ è possibile ricavare

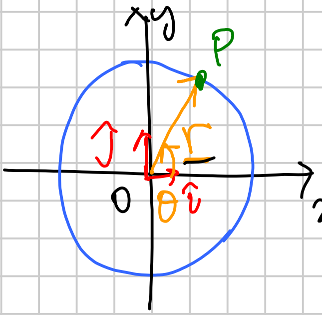
$OP_1(t)\quad OP_2(t) \quad \dots \quad OP_N(t) \qquad N > l$

le leggi orarie del moto dei singoli punti possono essere ricavate dalle dipendente temporali delle coordinate lagrangiane $q_1 \dots q_l$

$\dot{q}_1(t) \dots \dot{q}_l(t)$ velocità generalizzate

$\ddot{q}_1(t) \dots \ddot{q}_l(t)$ accelerazioni generalizzate

$$x_1\ x_2\ y_1\ y_2 \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_M & y_M & \theta_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{array}$$



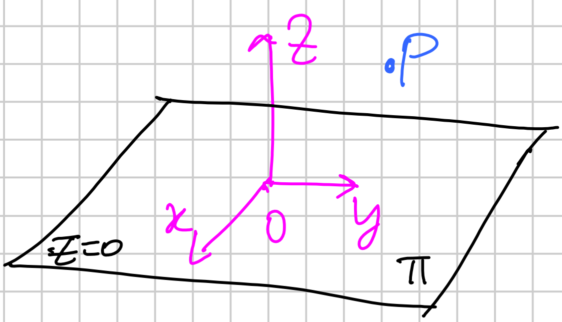
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad 1\,\text{DOF}$$

$x, y, z \to \theta$

$$OP = R\cos\theta\,\hat{i} + R\,\text{sen}\theta\,\hat{j}$$

ESEMPI DI VINCOLI UNILATERALI

APPOGGIO $\qquad z \geq 0$

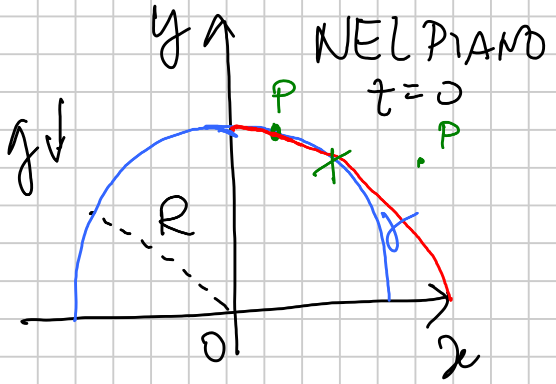


$z = 0$ punto appoggia su π

2DOF

$z > 0$ punto libero di muoversi

3DOF



$$x^2+y^2 \geq R^2 \qquad x^2+y^2-R^2 \geq 0$$

finché $P \in \gamma$ potete usare 1 DOF

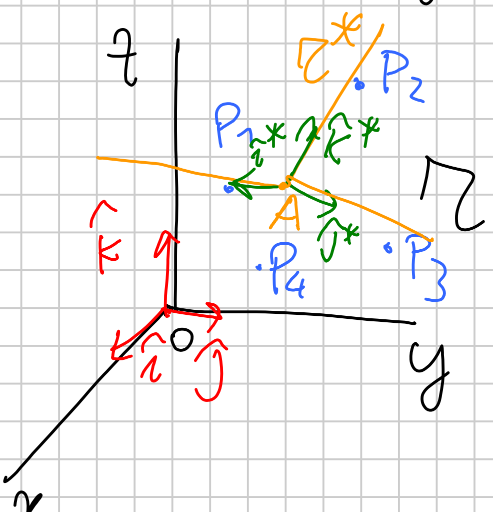
$$OP = R\cos\theta\,\hat{\imath} + R\sin\theta\,\hat{\jmath}$$

Se P si stacca, occorrono 2 DOF

CONDIZIONI DI DISTACCO DA STUDIARE UTILIZZANDO IL CONCETTO DI REAZIONE VINCOLARE

N punti $P_1 \dots P_N$

$$OP_i = x_i\,\hat{\imath} + y_i\,\hat{\jmath} + z_i\,\hat{k} \qquad d(P_i, P_j) = \text{costante}$$



SI INTRODUCE UNA TERNA SOLIDALE $\mathcal{T}^*$

$\mathcal{T}^*$ è scelto in modo tale che i punti $P_1 \dots P_N$ sono FERMI in $\mathcal{T}^*$ $\forall t$ durante tutto l'intervallo di tempo in cui avviene il moto

$$\underline{V}_{P_i}^{(r)} = \underline{0} \qquad \underline{V}_P^{(a)} = \underline{V}_P^{(tr)} = \underline{V}_A + x_i^* \frac{d\hat{\imath}^*}{dt} + y_i^* \frac{d\hat{\jmath}^*}{dt} + z_i^* \frac{d\hat{k}^*}{dt}$$

I punti P_i nel sistema $\mathcal{T}^*$ hanno coordinate $P_i \equiv (x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ INDIPENDENTI DAL TEMPO

- Studiare la velocità di A (A può coincidere con uno dei P_i)
- Stabilire l'orientazione nel tempo di Σ^* rispetto a Σ (3 PARAMETRI)

$$\hat{i}^* = \alpha_1(t)\,\hat{i} + \beta_1(t)\,\hat{j} + \gamma_1(t)\,\hat{k}$$
$$\hat{j}^* = \alpha_2(t)\,\hat{i} + \beta_2(t)\,\hat{j} + \gamma_2(t)\,\hat{k}$$
$$\hat{k}^* = \alpha_3(t)\,\hat{i} + \beta_3(t)\,\hat{j} + \gamma_3(t)\,\hat{k}$$

9 funzioni

$|\hat{i}^*| = |\hat{j}^*| = |\hat{k}^*| = 1$ $\rightarrow$ 3 relazioni

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1 \end{cases}$$

$\hat{i}^* \cdot \hat{j}^* = \hat{i}^* \cdot \hat{k}^* = \hat{j}^* \cdot \hat{k}^* = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \\ \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = 0 \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

3 relazioni $\longrightarrow$

Per determinare l'orientazione di Σ^* rispetto a Σ BASTANO 3 PARAMETRI

Poi c'è da determinare la posizione di A rispetto ad O $\rightarrow$ altri 3 parametri

$\longrightarrow$ IN TOTALE PER DETERMINARE LA CONFIGURAZIONE DI UN SISTEMA DI

N PUNTI RIGIDAMENTE COLLEGATI FRA LORO BASTANO 6 PARAMETRI LAGRANGIANI (6 DOF)

$$|P_iP_j|^2 = d_{ij} \quad \forall i,j = 1 \dots N \quad i \neq j$$

$$P_iP_j \cdot P_iP_j = d_{ij}^2$$ COSTANTE

Deriviamo rispetto al tempo

$$P_iP_j = P_iO + OP_j = OP_j - OP_i$$

O è un punto fisso

$$\frac{d}{dt}(P_iP_j) = \frac{d}{dt}(OP_j) - \frac{d}{dt}(OP_i) = \underline{v}_{P_j} - \underline{v}_{P_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left[(P_iP_j) \cdot P_iP_j\right] = 0 \qquad \left(\frac{d}{dt}P_iP_j\right) \cdot P_iP_j + P_iP_j \cdot \frac{d}{dt}P_iP_j = 0$$

$$\cancel{2}\frac{d}{dt}(P_iP_j) \cdot P_iP_j = 0$$

$$(\underline{v}_{P_j} - \underline{v}_{P_i}) \cdot P_iP_j = 0 \qquad P_iP_j \cdot \underline{v}_{P_j} = P_iP_j \cdot \underline{v}_{P_i}$$

$$\widehat{P_iP_j}$$

$$\frac{P_iP_j \cdot \underline{v}_{P_j}}{|P_iP_j|} = \frac{P_iP_j \cdot \underline{v}_{P_i}}{|P_iP_j|}$$

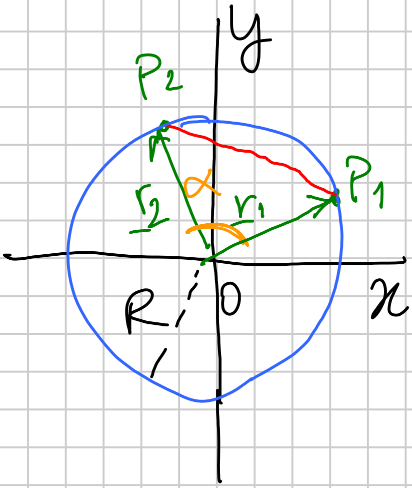
$$\boxed{\widehat{P_iP_j} \cdot \underline{v}_{P_j} = \widehat{P_iP_j} \cdot \underline{v}_{P_i}}$$

Se un sistema di punti è rigido, allora 2 qualsiasi punti P_i e P_j hanno velocità $\underline{v}_{P_i}$ e $\underline{v}_{P_j}$

tali che le loro proiezioni lungo la retta congiungente P_i e P_j sono uguali fra loro

Se per tutti i punti vale $\widehat{P_iP_j} \cdot \underline{v}_{P_j} = \widehat{P_iP_j} \cdot \underline{v}_{P_i}$, allora il moto del sistema è un moto rigido

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÈ IL MOTO DI UN SISTEMA DI N PUNTI SIA RIGIDO È CHE LE VELOCITÀ DI 2 QUALSIASI SUOI PUNTI AD UN TEMPO t FISSATO ABBIANO LA STESSA COMPONENTE LUNGO LA CONGIUNGENTE



$$\frac{\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2}{R^2} = \cos\alpha = \text{costante}$$

$$OP_1 = R\cos\theta\,\hat{\imath} + R\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}$$

$$OP_2 = R\cos(\theta+\alpha)\,\hat{\imath} + R\,\text{sen}(\theta+\alpha)\,\hat{\jmath}$$

$$P_1P_2 = P_1O + OP_2 = OP_2 - OP_1 =$$

$$R\left(\cos(\theta+\alpha) - \cos\theta\right)\hat{\imath} + R\left(\text{sen}(\theta+\alpha) - \text{sen}\,\theta\right)\hat{\jmath}$$

$$\underline{v}_{P_1} = -\dot{\theta}R\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + \dot{\theta}R\cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\underline{v}_{P_2} = -\dot{\theta}R\,\text{sen}(\theta+\alpha)\,\hat{\imath} + \dot{\theta}R\cos(\theta+\alpha)\,\hat{\jmath}$$

$$\underline{v}_{P_1}\cdot P_1P_2 = -\dot{\theta}R^2\,\text{sen}\,\theta\left(\cos(\theta+\alpha)-\cos\theta\right) + \dot{\theta}R^2\cos\theta\left(\text{sen}(\theta+\alpha)-\text{sen}\,\theta\right)$$

$$= \dot{\theta}R^2\left[\text{sen}(\theta+\alpha)\cos\theta - \cos(\theta+\alpha)\,\text{sen}\,\theta + \cancel{\text{sen}\,\theta\cos\theta} - \cancel{\text{sen}\,\theta\cos\theta}\right]$$

$$= \dot{\theta}R^2\,\text{sen}(\theta+\alpha-\theta) = \dot{\theta}R^2\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\underline{v}_{P_2}\cdot P_1P_2 = -\dot{\theta}R^2\,\text{sen}(\theta+\alpha)\left[\cos(\theta+\alpha)-\cos\theta\right] + \dot{\theta}R^2\cos(\theta+\alpha)\left[\text{sen}(\theta+\alpha)-\text{sen}\,\theta\right] =$$

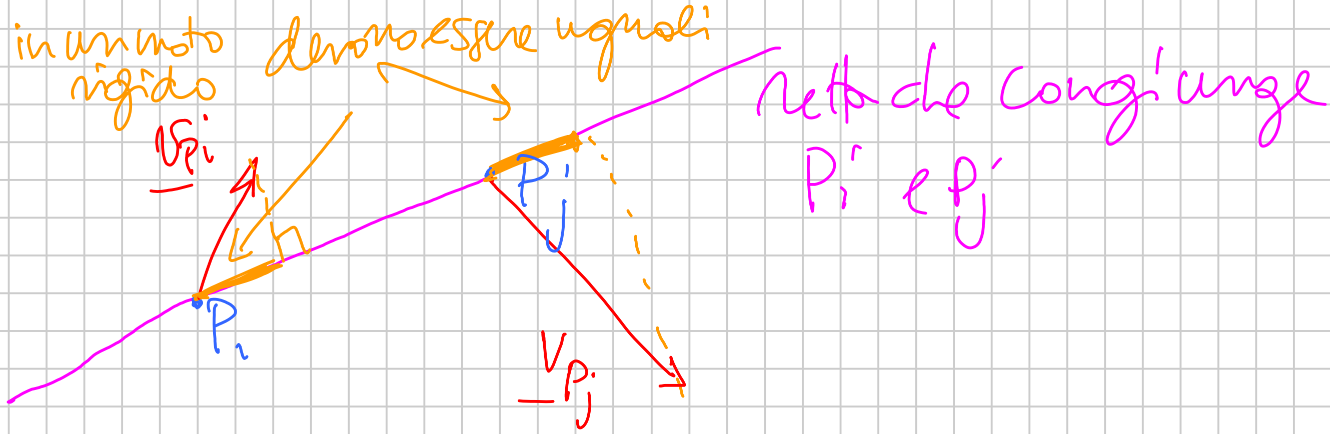
$$= \dot{\theta}R^2\left[\text{sen}(\theta+\alpha)\cos\theta - \cos(\theta+\alpha)\,\text{sen}\,\theta \cancel{- \text{sen}(\theta+\alpha)\cos(\alpha+\theta)} \cancel{+ \cos(\theta+\alpha)\,\text{sen}(\theta+\alpha)}\right]$$

$$= \dot{\theta}R^2\,\text{sen}(\cancel{\theta}+\alpha-\cancel{\theta}) = \dot{\theta}R^2\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\dot{\theta}R^2\,\text{sen}\,\alpha = \dot{\theta}R^2\,\text{sen}\,\alpha$$

se il vincolo è rigido (α = costante)

Se invece vogliamo che il sistema sia rigido allora dobbiamo imporre che α non dipenda dal tempo (per calcolare le velocità dovrei derivare anche α rispetto al tempo)


in un moto rigido
devono essere uguali
retta che congiunge P_i e P_j
$\underline{v}_{P_i}$
P_i
P_j
$\underline{v}_{P_j}$