VINCOLI

Titolo nota 22/10/2012

APPOGGI
ROTOLAMENTI (con e senza strisciamento)
COPPIE CINEMATICHE

APPOGGIO Consideriamo una superficie Σ data dall'equazione $f(x,y,z,t)=0$

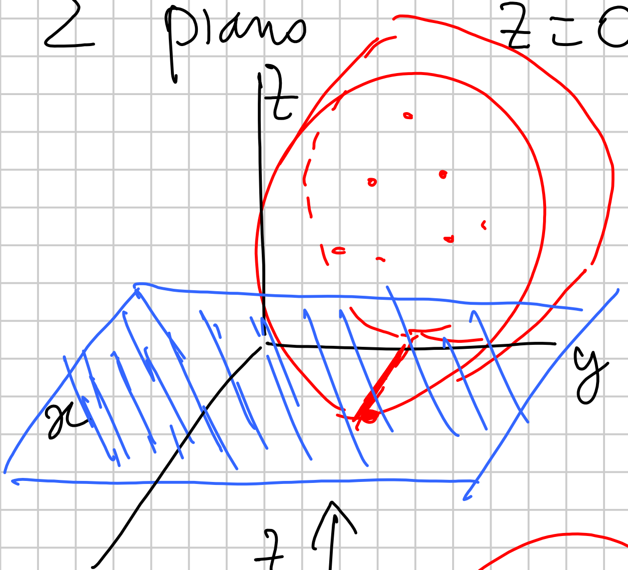
Consideriamo un sistema rigido S

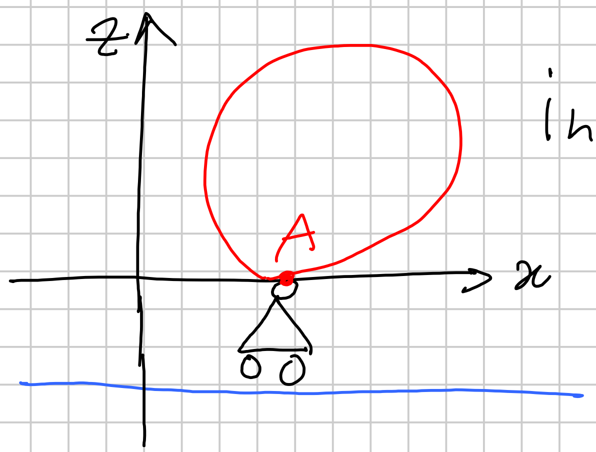
tutti i punti di S devono stare "dalla stessa parte" rispetto a Σ $\quad P \in S \quad P \equiv (x_P, y_P, z_P)$

$f(x_P, y_P, z_P) \geq 0$ oppure $\leq 0 \quad \forall P \in S$

Nessun punto di S può attraversare la superficie Σ

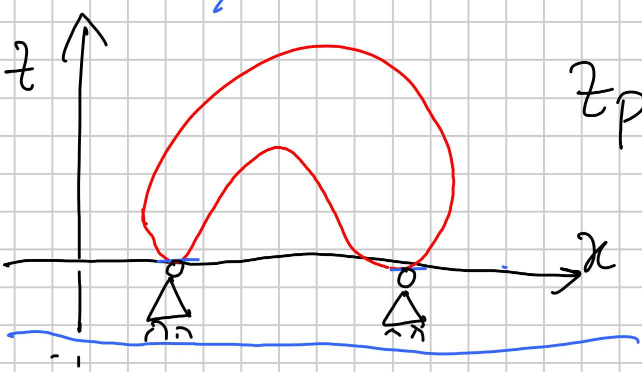
Σ piano $z=0$ $\qquad z_{P_i} \geq 0 \quad \forall i = 1 \ldots n$





in 2D

$z_{P_i} \geq 0 \quad \forall P_i$

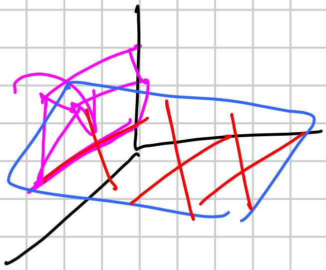


Nel piano un appoggio semplice (1 punto a contatto) toglie 1DOF nella configurazione limite in cui $\exists\ \bar{P}: f(x_{\bar{P}}, y_{\bar{P}}, z_{\bar{P}}) = 0$

Nello spazio se c'è 1 solo punto di S a contatto l'appoggio toglie 1DOF

Se c'è una linea retta di punti toglie 3DOF

la retta sul piano ha 2 parametri + 1 rotazione intorno alla retta



VINCOLI DI ROTOLAMENTO

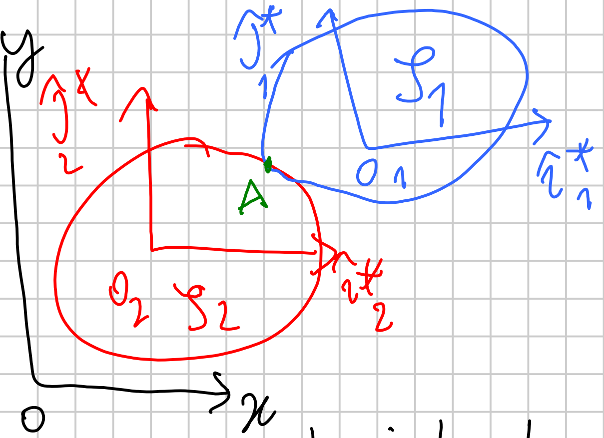
2 sistemi di punti rigidi S_1 ed S_2 delimitati da 2 superfici geometriche σ_1, σ_2

Vogliamo fare in modo che ad ogni istante di tempo ci sia contatto fra S_1 ed S_2

vogliamo cioè che σ_1 e σ_2 abbiano almeno un punto in comune

- Esattamente un punto in comune
- una retta, una semiretta un segmento di punti in comune
- un pezzo di superficie (piano, sfera...) in comune

VELOCITÀ DI STRISCIAMENTO



$A \in S_1$ A_1

$A \in S_2$ A_2

A geometrico A

a un certo istante di tempo

$OO_2 + O_2A_2$ indica la posizione di A_2

$OO_1 + O_1A_1$ indica la posizione di A_1

$OA_2 = OA_1$ per avere contatto in A

VELOCITÀ di STRISCIAMENTO è una velocità relativa, cioè la velocità di A_2 relativamente alla velocità di A_1

PROBLEMA: durante il moto A_1 e A_2 non restano gli stessi

$\underline{V}_s(t)$ è la velocità di un punto geometrico A che nell'istante t è sovrapposto ad A_1, relativamente alla velocità di un punto A' sovrapposto ad A_2

se $\boxed{\underline{V}_s = \underline{0}}$ in un certo intervallo di tempo (t_1, t_2) durante il quale avviene il moto, si parla di Rotolamento senza strisciamento

Il vincolo di rotolamento riguarda le velocità

Quando c'è strisciamento $\underline{v}_s \parallel$ piano tangente in A alle superfici

Il vincolo di rotolamento, in generale, è ANOLONOMO

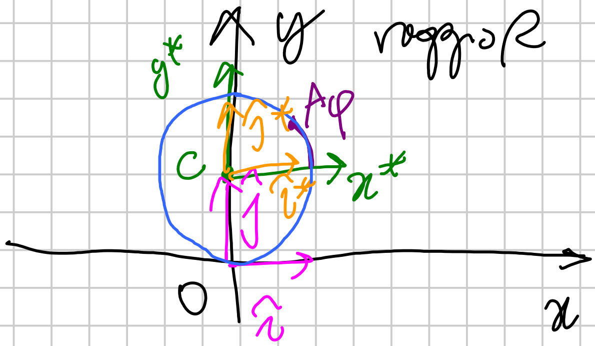
Talvolta può essere ridotto a un vincolo geometrico

disco che rotola lungo una linea data

Sfera che rotola senza strisciare su un piano e basta → resta un vincolo anolonomo

---

ESEMPIO disco di raggio R



$$OC = x_c(t)\,\hat{\imath} + y_c(t)\,\hat{\jmath}$$

$$\underline{v}_c = \dot{x}_c(t)\,\hat{\imath} + \dot{y}_c(t)\,\hat{\jmath}$$

$$CA\varphi = R(\cos\varphi\,\hat{\imath}^* + \operatorname{sen}\varphi\,\hat{\jmath}^*)$$

$$\hat{\imath}^* = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{\jmath}^* = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$\theta = \theta(t)$

φ è indip dat

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}^* = \cos(\theta(t))$$

$$\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath}^* = \operatorname{sen}(\theta(t))$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\imath}^* = \dot{\theta}(t)\,\hat{\jmath}^* \qquad \frac{d}{dt}\hat{\jmath}^* = -\dot{\theta}(t)\,\hat{\imath}^*$$

$$\frac{CA\varphi \cdot \hat{\imath}^*}{R} = \cos\varphi \qquad \frac{CA\varphi \cdot \hat{\jmath}^*}{R} = \operatorname{sen}\varphi$$

$\theta(0) = 0$ $\quad \hat{\imath} = \hat{\imath}^* \quad \hat{\jmath} \equiv \hat{\jmath}^*$ al tempo $t = 0$

$x_c(0) = 0$ $\quad OA\varphi(0)$ diretto lungo $\hat{\imath}$

$$OA_\varphi = OC + CA_\varphi = \cancel{x_c(0)}\,\hat{\imath} + y_c(0)\,\hat{\jmath} + R\cos\varphi\,\hat{\imath} + R\,\text{sen}\,\varphi\,\hat{\jmath} = \underline{0}$$

Al tempo $t=0$

$$\begin{cases} y_c(0) + R\,\text{sen}\,\varphi = 0 \\ R\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

$\cos\varphi = 0 \rightarrow \text{sen}\,\varphi = \pm 1$ $\quad y_c(0) = \mp R$

se vogliamo

$y_c(0) > 0$ $\quad \varphi = \frac{3\pi}{2}$ $\quad (\text{sen}\,\varphi = -1)$

$A_{\frac{3\pi}{2}}$ è il punto del disco a contatto con l'asse $y=0$ al tempo $t=0$ nel punto $(0,0)$ di $\mathcal{T}$

$$\underline{V}^{(a)}_{A_{\frac{3\pi}{2}}} = \cancel{\underline{V}^{(r)}_{A_{\frac{3\pi}{2}}}} + \underline{V}^{(t)}_{A_{\frac{3\pi}{2}}} = \underline{0} + \cancel{\underset{\downarrow 0}{x^*}\frac{d\hat{\imath}^*}{dt}} + \underset{\downarrow -r}{y^*}\frac{d\hat{\jmath}^*}{dt} + \underline{V}_c^{(a)}$$

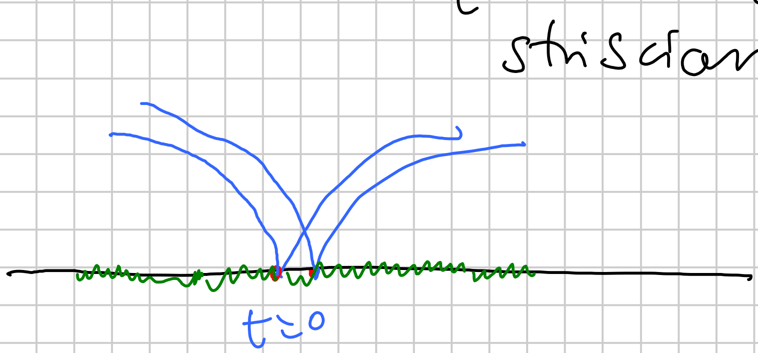
$$= \underline{0} - r\left(-\dot{\theta}\,\hat{\imath}\right) + \dot{x}_c(0)\,\hat{\imath} + \dot{y}_c(0)\,\hat{\jmath}$$

$\hat{\imath} = \hat{\imath}^*$ at $t=0$

$$\underline{V}_{A_{\frac{3\pi}{2}}}(0) = \left(r\dot{\theta} + \dot{x}_c(0)\right)\hat{\imath} + \cancel{\dot{y}_c(0)\,\hat{\jmath}}$$

$\dot{x}_c(0) = -r\dot{\theta}$ se vogliamo che $\underline{V}_{A_{\frac{3\pi}{2}}}$ sia $= 0$

altrimenti $\left[r\dot{\theta} + \dot{x}(0)\right]\hat{\imath}$ è la velocità di strisciamento al tempo $t=0$



φ in funzione del tempo

$\varphi(0) = \frac{3\pi}{2}$ $\quad \varphi(t) = ?$

$x_c(t)$ funzione generica con $x_c(0) = 0$

$y_c(t) = R \quad \forall t$

$OA_\varphi = (\dots\dots) \hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$ se vogliamo che A_φ

sia a contatto col piano

$OA_\varphi = OC + CA_\varphi = [x_c(t)\hat{\imath} + R\hat{\jmath}] + [R\cos\varphi\,\hat{\imath}^* + R\,\mathrm{sen}\varphi\,\hat{\jmath}^*]$

$= [x_c(t) + R\cos\varphi\cos\theta(t) - R\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\theta(t)]\,\hat{\imath}$

$+ \underbrace{[R + R\cos\varphi\,\mathrm{sen}\theta(t) + R\,\mathrm{sen}\varphi\cos\theta(t)]}_{=0 \text{ per avere il contatto}}\,\hat{\jmath}$

$R + R\,\mathrm{sen}(\theta(t) + \varphi) = 0 \quad \forall t$

$\mathrm{sen}\underbrace{(\theta(t) + \varphi)}_{3\pi/2} = -1 \quad \forall t \qquad \varphi = \frac{3\pi}{2} - \theta(t)$

$CA_\varphi = R\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta(t)\right)\hat{\imath}^* + R\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \theta(t)\right)\hat{\jmath}^*$

NON DESCRIVE ALCUN MOTO

Velocità di strisciamento

$OA_{\varphi(t)} = OC(t) + CA_{\varphi(t)}$

NON SI DEVE CALCOLARE $\frac{d}{dt} OA_{\varphi(t)}$!!

$$\underline{V}_{A\varphi} = \underline{V}_C + x^*_{A\varphi}\frac{d\hat{\imath}^*}{dt} + y^*_{A\varphi}\frac{d\hat{\jmath}^*}{dt}$$

$$= \dot{x}_C(t)\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + R\cos\varphi\left(\dot{\theta}(t)\hat{\jmath}^*\right) + R\,\text{sen}\varphi\left(-\dot{\theta}(t)\hat{\imath}^*\right)$$

$$= \dot{x}_C(t)\,\hat{\imath} + R\dot{\theta}\left(-\text{sen}\varphi\,\hat{\imath}^* + \cos\varphi\,\hat{\jmath}^*\right)$$

$$= \dot{x}_C(t)\,\hat{\imath} + R\dot{\theta}\Big[-\text{sen}\varphi\left(\cos\theta\,\hat{\imath} + \text{sen}\theta\,\hat{\jmath}\right) + \cos\varphi\left(-\text{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}\right)\Big]$$

$$= \dot{x}_C(t)\,\hat{\imath} + R\dot{\theta}\left[-\text{sen}(\theta+\varphi)\,\hat{\imath}\right] + R\dot{\theta}\cos(\theta+\varphi)\,\hat{\jmath}$$

ORA SÌ METTE $\varphi = \frac{3\pi}{2} - \theta \rightarrow \theta + \varphi = \frac{3\pi}{2}$

$\underline{V}_{A\varphi} = \left[\dot{x}_C(t) + R\dot{\theta}\right]\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath}$ tangente all'asse x

$\underline{V}_S(t) = \left[\dot{x}_C(t) + R\dot{\theta}(t)\right]\hat{\imath} \quad \forall t$

Se vogliamo r.s.s. ad ogni t, dobbiamo imporre $\dot{\theta}(t) = -\frac{\dot{x}_C(t)}{R}$ oppure $\dot{x}_C(t) = -R\dot{\theta}(t)$

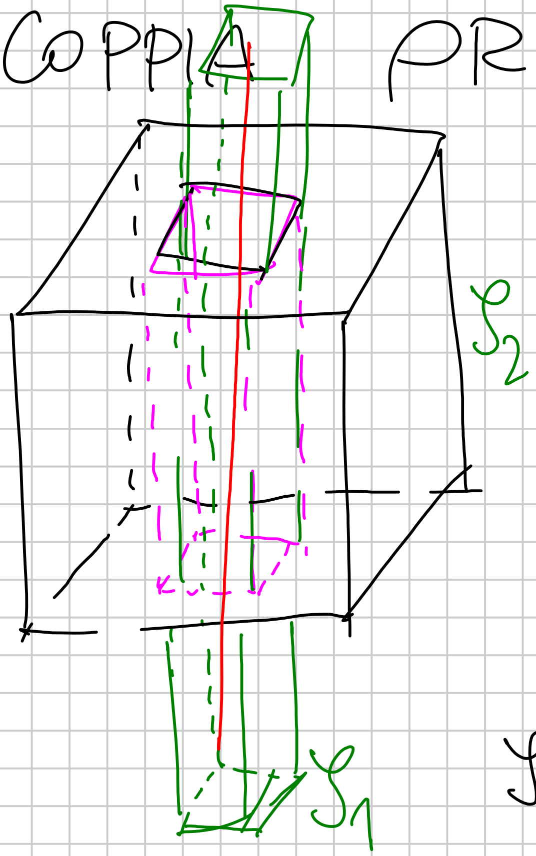
Sembra un vincolo anolonomo!

$$\int_{t_0}^{t} \dot{\theta}(\tau)\,d\tau = -\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}_c(\tau)}{R}$$

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \frac{-x_c(t) + x_c(t_0)}{R}$$

ALTRI VINCOLI CON SUPERFICI A CONTATTO

COPPIA PRISMATICA



tra S_1 ed S_2 c'è solo traslazione relativa

è la direzione comune a tutte le generatrici

S_2 sia "fermo"

S_1 ha solo 1 DOF

Nello spazio la C.P. toglie 5 DOF

Nel piano la CP toglie 2 DOF

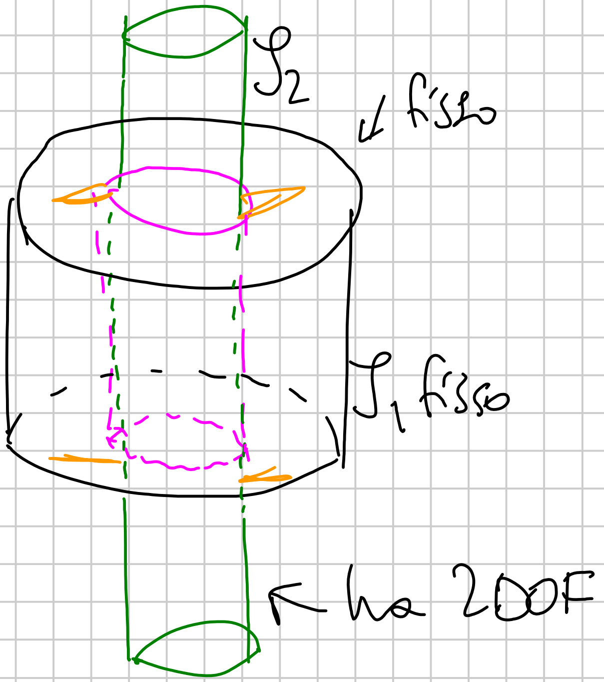
COPPIE ROTOIDALI (CERNIERE)

FISSE O MOBILI

Σ_1 Σ_2 sono due superfici di rotazione aventi l'asse in comune e uguali fra loro

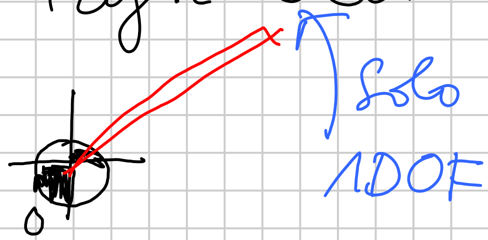
asse della coppia

generalmente Σ_1 e Σ_2 sono cilindri

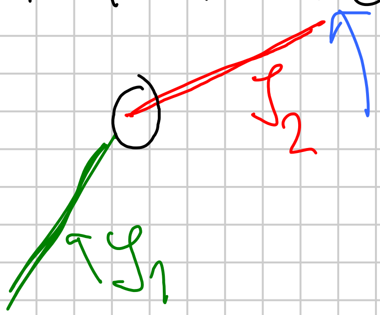


S_2 ha 2 dof, quindi la coppia rotoidale toglie almeno 4 DOF

Se si blocca la traslazione lungo le generatrici la CR toglie 5 DOF



Nel piano una cerniera fissa fa perdere 2 DOF



si blocca la posizione di un punto di S_2 rispetto a S_1 (si perdono 2 gradi di libertà di traslazione di S_2

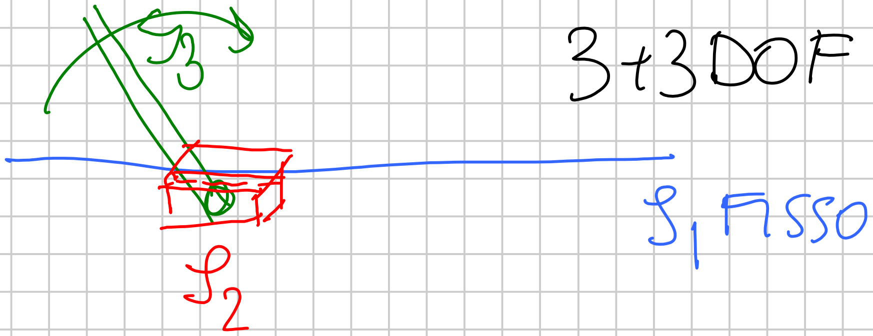
Se vogliamo descrivere $S_1 \cup S_2$ occorrerebbero 3 coordinate (nel piano) per S_1 e 3 per S_2

3 usate per descrivere S_1, 1 sola mi serve per descrivere S_2 → totale 4 DOF. 2 sono perduti

---

CURSORE O CORSOIO

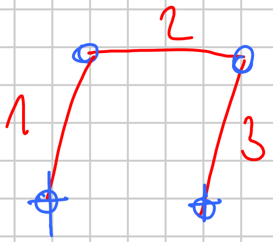
Unione di una coppia prismatica con una cerniera mobile



3+3 DOF per S_2 e S_3 se fossero liberi!

la coppia prismatica ne toglie 2, la cerniera mobile ne toglie 2 → si perdono 4 DOF e ne restano 2 – S_2 "si trascura"

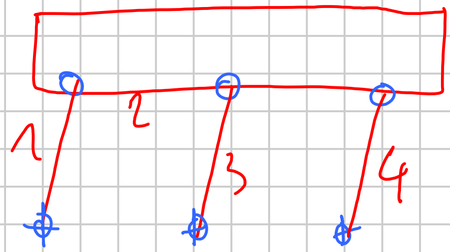
S_3 da solo ha 2DOF (trasla lungo S_1 e ruota intorno alla cerniera mobile



$3 \times 3 = 9$ DOF

$-4 \times 2 = 8$ DOF persi

1 DOF OK



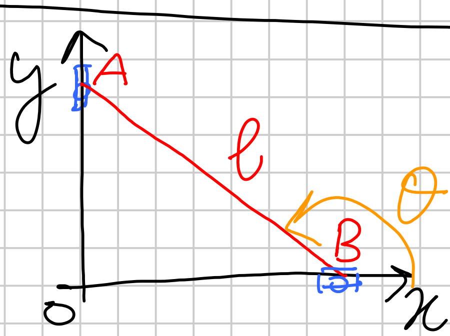
$4 \times 3 = 12$ DOF

$-6 \times 2 = 12$ DOF

0 DOF NON VA BENE!

N·3 − DOF PERSI ~~=~~ ≤ OK DOF DEL SISTEMA

ESEMPIO CON CURSORI



A si muove lungo l'asse y

B si muove lungo l'asse x

$3 \times 3 = 9$ DOF − 2 cursori che fanno perdere 4 DOF
totale 8 DOF persi

DOF del sistema $\geq 9 - 8 = 1$

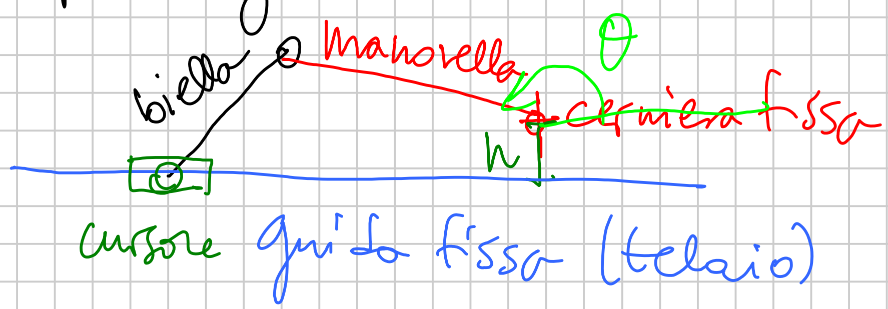
Ne basta 1? SI ad esempio θ è uno buono coordinata lagrangiana

Cursore = appoggio che non si stacca

COPPIA ELICOIDALE che toglie 5 DOF (sistema vite-madrevite)
CERNIERA SFERICA toglie 3 DOF
nello spazio

PIÙ SISTEMI RIGIDI UNITI INSIEME FORMANO DELLE CATENE CINEMATICHE

Ciascuno dei sistemi rigidi nel moto relativo rispetto agli altri ha 1 DOF → MECCANISMO



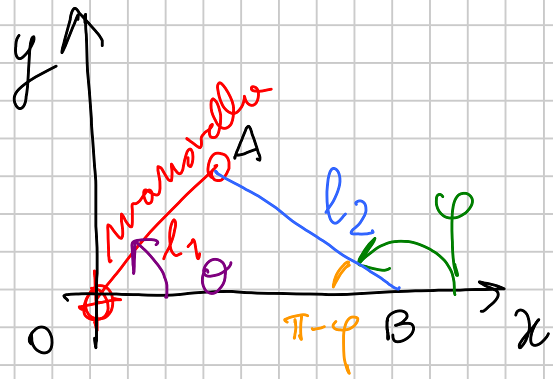
$2 \times 3 = 6$ DOF (3 bielle + 3 manovella)

1 DOF perso per il cursore

2 DOF persi per cerniera mobile

2 DOF persi per cerniera fissa

Resta ALMENO 1 DOF θ



$$OA = l_1 \cos\theta\,\hat{i} + l_2 \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$$

$$B \equiv (x_B, 0)$$

Teorema dei seni $\overset{\triangle}{OAB}$

$$\frac{l_1}{\underbrace{\operatorname{sen}(\pi-\varphi)}_{=\operatorname{sen}\varphi}} = \frac{l_2}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{l_1 \operatorname{sen}\theta}{l_2}$$

$$OB = OA + AB = l_1 \cos\theta\,\hat{i} + l_1 \operatorname{sen}\theta\,\hat{j} - l_2 \cos\varphi\,\hat{i} - l_2 \operatorname{sen}\varphi\,\hat{j} =$$

$$= (l_1 \cos\theta - l_2 \cos\varphi)\,\hat{i} + \cancel{(l_1 \operatorname{sen}\theta - l_2 \operatorname{sen}\varphi)}\,\hat{j}$$

$$OB = (l_1 \cos\theta - l_2 \cos\varphi)\,\hat{i}$$

$$\underline{v_B} = (-\dot\theta\, l_1 \operatorname{sen}\theta + l_2 \dot\varphi \operatorname{sen}\varphi)\,\hat{i}$$

$$= \left(-\dot\theta\, l_1 \operatorname{sen}\theta + \cancel{l_2}\dot\varphi\, \frac{l_1 \operatorname{sen}\theta}{\cancel{l_2}}\right)\hat{i}$$

$$= l_1(\dot\varphi - \dot\theta) \operatorname{sen}\theta\,\hat{i}$$