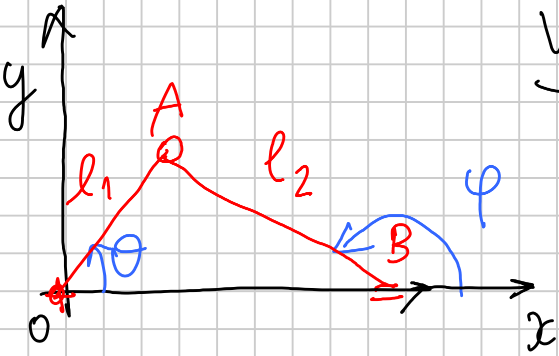
ESERCIZI CINEMATICA

Titolo nota 23/10/2012



$\underline{V_B} = l_1 \operatorname{sen}\theta \cdot (\dot\varphi - \dot\theta)\,\hat{i} \qquad x_B > x_A$

$\operatorname{sen}\varphi = \frac{l_1}{l_2} \operatorname{sen}\theta \qquad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$

$\dot\varphi \cos\varphi = \frac{l_1}{l_2} \dot\theta \cos\theta$

$\dot\varphi = \frac{l_1}{l_2} \frac{\dot\theta \cos\theta}{\cos\varphi} \qquad \cos\varphi = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}$

$\dot\varphi = -\frac{l_1}{l_2} \frac{\dot\theta \cos\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta}} \qquad \dot\varphi = f(\theta, \dot\theta)$

$\underline{V_B}\; l_1 \operatorname{sen}\theta \left[-\frac{l_1}{l_2} \frac{\dot\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{l_1^2}{l_2^2}\operatorname{sen}^2\theta}} - \dot\theta \right] \hat{i}$

$P_s \in$ manovella $\qquad |OP_1| = s \qquad 0 \le s \le l_1$

$OP_s = s\cos\theta\,\hat{i} + s\operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$

$\underline{V_{P_s}} = \frac{dOP_s}{dt} = \dot\theta s(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}) \qquad \underline{V_{P_s}} = \underline{g_s}(\theta, \dot\theta)$

$P_u \in$ biella $\qquad 0 \le u \le l_2 \qquad P_0 \equiv A$

$P_{l_2} \equiv B$

$OP_u = OB + BP_u$

$OB = \left[l_1\cos\theta + l_2\sqrt{1-\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\operatorname{sen}^2\theta} \right] \hat{i}$

$$BP_u = (\ell_2 - u)\left[\cos\varphi\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\varphi\,\hat{\jmath}\right]$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\ell_1}{\ell_2}\operatorname{sen}\theta \qquad \cos\varphi = -\sqrt{1 - \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2}\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$OP_u = \left[\ell_1\cos\theta - (\ell_2 - u)\sqrt{1 - \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2}\operatorname{sen}^2\theta}\right]\hat{\imath} +$$

$$+\left[\ell_2\sqrt{1 - \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{\ell_1}{\ell_2}\operatorname{sen}\theta\right]\hat{\jmath}$$

traiettoria di un qualunque punto della biella

$$\underline{v}_{P_u} = \frac{dOP_u}{dt}$$

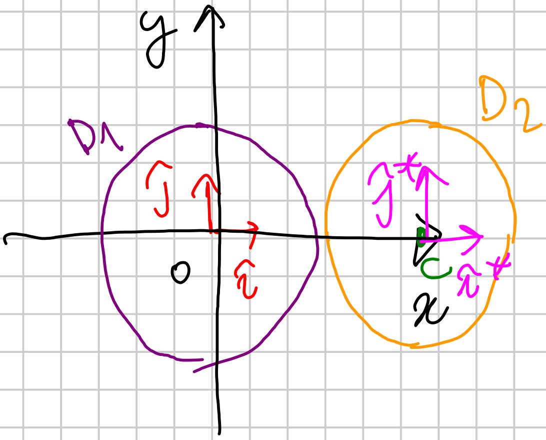
ESERCIZIO SU ROTOLAMENTO

D_1 disco di centro O e raggio R

$$x^2 + y^2 = R^2$$

D_2 di centro C (mobile) e raggio R

Voglio descrivere il R.S.S. di D_2 su D_1



supponiamo che

$|OC| = 2R$ C si muove di moto circolare uniforme

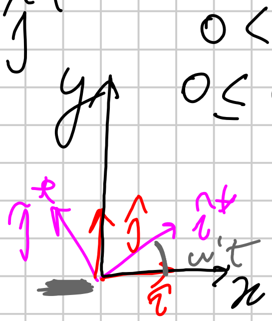
$$OC = 2R\left(\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}(\omega t)\,\hat{\jmath}\right)$$

$$CP_{ED_2} = a\cos\varphi\,\hat{\imath}^* + a\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\jmath}^* \qquad 0 < a \le R$$

$$0 \le \varphi < 2\pi$$

$$\hat{\imath}^* = \cos(\omega' t)\,\hat{\imath} + \sin(\omega' t)\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{\jmath}^* = -\sin(\omega' t)\,\hat{\imath} + \cos(\omega' t)\,\hat{\jmath}$$



$\hat{\imath} = \cos(\omega' t)\,\hat{\imath}^* - \sin(\omega' t)\,\hat{\jmath}^*$

$\hat{\jmath} = \operatorname{sen}(\omega' t)\,\hat{\imath}^* + \cos(\omega' t)\,\hat{\jmath}^*$

Cerco un punto A_φ del bordo che è fermo all'istante t

$CA_\varphi = R(\cos\varphi\,\hat{\imath}^* + \sin\varphi\,\hat{\jmath}^*)$

$OA_\varphi = OC + CA_\varphi = R[2\cos\omega t + \cos(\omega' t)\cos\varphi -$
$- \operatorname{sen}(\omega' t)\operatorname{sen}\varphi]\,\hat{\imath} + R[2\sin\omega t + \cos(\omega' t)\operatorname{sen}\varphi +$
$+ \operatorname{sen}(\omega' t)\cos\varphi]\,\hat{\jmath} = R[2\cos(\omega t) + \cos(\omega' t + \varphi)]\,\hat{\imath}$
$+ R[2\sin(\omega t) + \operatorname{sen}(\omega' t + \varphi)]$

Al tempo $t=0$

$OA_{\varphi(0)} = R(2 + \cos\varphi_0)\,\hat{\imath} + R\operatorname{sen}\varphi_0\,\hat{\jmath}$

$|OA_{\varphi_0}|^2 = R^2 \quad \cancel{R^2}(4 + \cos^2\varphi_0 + 4\cos\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi_0) = \cancel{R^2}\ 1$

$4 + 4\cos\varphi + \cancel{1} = \cancel{1}\ 0 \qquad \cos\varphi_0 = -1$

$\boxed{\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha}$

$\varphi_0 = \pi$

Al tempo $t=0$ $\quad A_\pi$ deve essere fermo

$\boxed{\sin(\alpha+\pi) = -\operatorname{sen}\alpha}$

$\omega = \omega'$ ci credete? Io penso di no!

Imponiamo una condizione di puro rotolamento at $t=0 \longrightarrow$ relazione fra ω e ω'

$\varphi = \pi \qquad OA_{\pi}(t) = R\left[2\cos(\omega t) - \cos(\omega' t)\right]\hat{\imath}$

$\qquad\qquad R\left[2\sin(\omega t) - \text{sen}(\omega' t)\right]\hat{\jmath}$

$\underline{v}_{A_\pi} = R\left[-2\omega\sin(\omega t) + \omega'\sin(\omega' t)\right)\hat{\imath}$

$\quad + R\left[2\omega\cos(\omega t) - \omega'\cos(\omega' t)\right]\hat{\jmath} \quad = \underline{0} \text{ per } t = 0$

$\underline{v}_{A_\pi}(0) = R\left[2\omega - \omega'\right]\hat{\jmath} = 0 \qquad \boxed{\omega' = 2\omega}$

Cosa succede per t generico?

Quale φ devo scegliere al tempo t per determinare il punto di contatto?

$|OA_{\varphi(t)}|^2 = R^2$

$R^2\left[2\cos(\omega t) + \cos(\omega' t + \varphi)\right]^2 + R^2\left[2\,\text{sen}(\omega t) + \text{sen}(\omega' t + \varphi)\right]^2$

$= R^2$

$\cancel{R^2}\left[4 + \cancel{1} + 4\cos(\omega t)\cos(\omega' t + \varphi) + 4\,\text{sen}(\omega t)\,\text{sen}(\omega' t + \varphi)\right]$

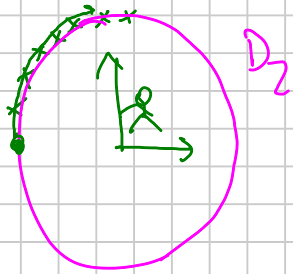
$= \cancel{R^2}$

$4\cos\left(\omega t - (\omega' t + \varphi)\right) + 4 = 0$

$\quad (\omega' t + \varphi - \omega t)$

$\cos(\omega' t + \varphi - \omega t) = -1 \qquad \omega' t + \varphi - \omega t = \pi$

$\varphi = \pi - (\omega' - \omega)t \qquad \omega' = 2\omega \qquad \boxed{\varphi = \pi - \omega t}$



Bisogna verificare che la condizione $\omega' = 2\omega$ è vera durante tutto il moto!

$$OA_\varphi = OC + CA_\varphi = R[2\cos\omega t + \cos(\omega' t)\cos\varphi - \operatorname{sen}(\omega' t)\operatorname{sen}\varphi]\hat{\imath} + R[2\sin\omega t + \cos(\omega' t)\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}(\omega' t)\cos\varphi]\hat{\jmath} = R[2\cos(\omega t) + \cos(\omega' t + \varphi)]\hat{\imath} + R[2\sin(\omega t) + \operatorname{sen}(\omega' t + \varphi)]$$

φ per ora resta costante: è come se io avessi scelto un punto "fisso" del disco, un elemento materiale

$$\underline{V}_{A\varphi} = R[-2\omega\operatorname{sen}(\omega t) - \omega'\operatorname{sen}(\omega' t + \varphi)]\hat{\imath} + R[2\omega\cos(\omega t) + \omega'\cos(\omega' t + \varphi)]\hat{\jmath}$$

NO $\dot{(\omega' t + \varphi)}$

ORA scelgo il punto A_φ "giusto" $\varphi = \pi - \omega t$

$$\underline{V}_{A\varphi} = R[-2\omega\operatorname{sen}(\omega t) - 2\omega\sin(2\omega t + \pi - \omega t)]\hat{\imath} + R[2\omega\cos(\omega t) + 2\omega\cos(2\omega t + \pi - \omega t)]\hat{\jmath}$$

$$= -2R\omega[\cancel{\operatorname{sen}(\omega t)} + \cancel{\operatorname{sen}(\omega t + \pi)}]\hat{\imath} + 2\omega R(\cancel{\cos(\omega t)} + \cancel{\cos(\omega t + \pi)})\hat{\jmath} = \underline{0} \quad \forall t$$

Vediamo la traiettoria di A_0 nel sistema di riferimento fisso in condizioni di r.s.s.

$$OA_0 = R[2\cos(\omega t) + \cos(2\omega t)]\hat{\imath} + R[2\,\mathrm{sen}(\omega t) + \mathrm{sen}(2\omega t)]$$

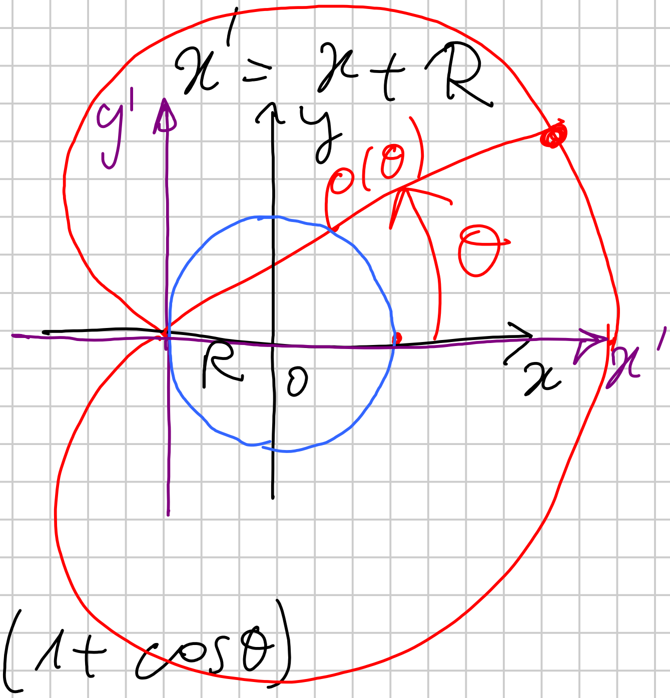
$$= R[2\cos(\omega t) + 2\cos^2(\omega t) - 1]\hat{\imath} + R[2\,\mathrm{sen}(\omega t) + 2\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t)]$$

$$x = 2R[1+\cos\omega t]\cos(\omega t) - R$$

$$y = 2R[1+\cos\omega t]\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$x' = 2R[1+\cos(\omega t)]\cos(\omega t)$$

$$y' = 2R[1+\cos(\omega t)]\,\mathrm{sen}(\omega t)$$



$\theta = \omega t$ $\qquad \rho(\theta) = 2R(1+\cos\theta)$

CARDIOIDE

STATICA E DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE (p.150 dispense MATTEI)

MASSA (concetto newtoniano di "quantità di materia che costituisce un corpo) $\quad m > 0$

m invariabile nel tempo

(NON STUDIAMO SISTEMI A MASSA VARIABILE)

m è lo stesso in tutti i sistemi di riferimento

(questo è falso in meccanica relativistica) s.d.r.

Punti $P \in \mathbb{R}^3$ + massa $\Rightarrow$ punto materiale

Un punto geometrico P "si trasforma" in un punto materiale se associamo ad esso una massa

Il punto materiale "non ha forma, né dimensione" ma è dotato di massa

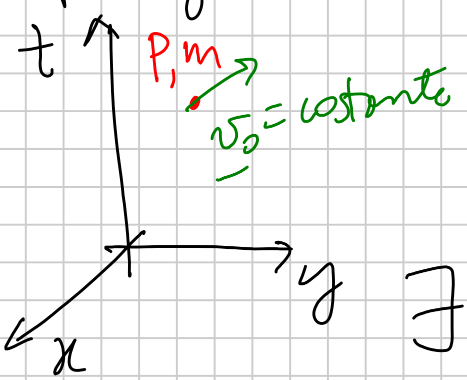
---

FORZA $\rightarrow$ qualunque azione capace di modificare lo stato di moto o di quiete di un corpo (punto materiale)

LA FORZA è un vettore APPLICATO

$(P, \underline{F})$

Per una descrizione della dinamica (capire cosa fa un punto materiale sottoposto all'azione di forze) è molto utile introdurre una tipologia di sistemi di riferimento detti INERZIALI



(L'$\exists$ di questi s.d.r. è postulata dal 1° principio della dinamica:

$\exists$ sistemi di riferimento nei quali un punto materiale che sia lontano da tutti gli altri corpi (che non interagisce con nessun altro corpo) o sta fermo o si muove di moto rettilineo uniforme. (S.d.r. solidale alle stelle "fisse")

Relatività galileiana: Ogni s.d.r. in moto rettilineo uniforme rispetto a un s.d.r. inerziale è esso stesso inerziale (con assi che non cambiano direzione nel tempo)

$\boxed{\text{MACH}}$

2° Principio della Dinamica

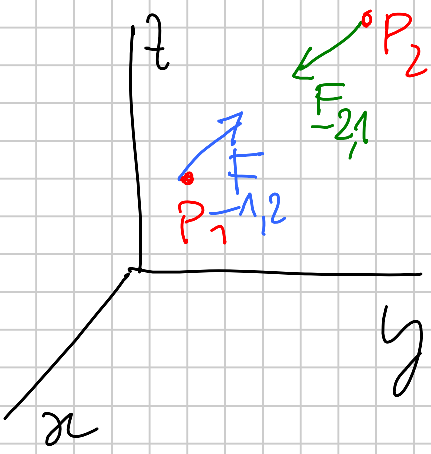
$\underline{F} = m\underline{a}$ in un sistema di riferimento inerziale

~~2° principio $\underline{F} = \underline{0}$ $\Rightarrow$ 1° principio~~

Per poter scrivere $\underline{F} = m\underline{a}$ devo aver postulato prima l'$\exists$ di un sistema di riferimento inerziale

---

3° principio della dinamica è in realtà una definizione (classica) di forza



$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$

le 2 forze hanno la stessa retta d'azione, data dalla retta per i punti P_1 e P_2

Questo è vero sia in condizioni di quiete che in condizioni di moto

$\underline{F}_{12}(t) = -\underline{F}_{21}(t)$ stesso istante di tempo t

Questo può essere vero solo in meccanica non relativistica, in generale è falso
niente (nemmeno i neutrini!) viaggia a velocità > c
Non è possibile propagare istantaneamente una interazione.
Non esiste azione a distanza! Esiste il concetto di campo.

FORZE D'INERZIA

Esistono "forze" dette forze d'inerzia o forze apparenti per le quali non è valido il III° principio
Queste forze vengono comunque introdotte in M.C. perchè in taluni casi consentono di trattare più facilmente certi problemi.
Secondo il PRINCIPIO DI EQUIVALENZA M.R. (Relatività generale) non è possibile distinguere una forza d'inerzia da una forza dovuta a un campo di gravità locale.

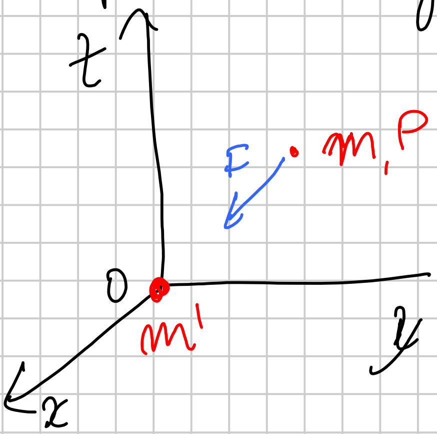
TIPOLOGIE DI FORZE

$\underline{F}$ = <u>costante</u> $\underline{P} = m\underline{g}$ PESO

$\underline{F}$ che dipendono unicamente dalla posizione di P

$$\underline{F} = \underline{F}(P) = F_x(x_p, y_p, z_p)\hat{i} + F_y(x_p, y_p, z_p)\hat{j} + F_z(x_p, y_p, z_p)\hat{k}$$

Esempio: la legge di gravitazione universale



$$\underline{F} = \frac{G m m'}{|OP|^2}\widehat{PO}$$

$G \simeq 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ in unità SI $\left(\frac{N \cdot m^2}{Kg^2}\right)$

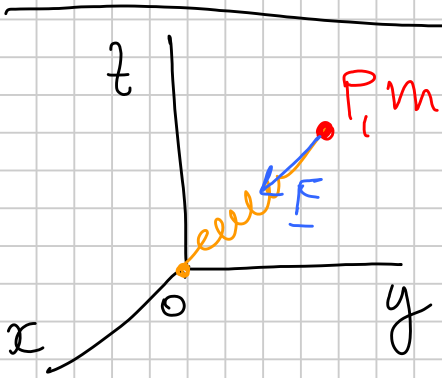
$$\underline{F} = \frac{K q q'}{|OP|^2}\widehat{OP}$$

$q\,q'$ cariche elettriche (Coulomb)

$K = 9 \cdot 10^9$ in unità SI

FORZA ELASTICA

molla avente lunghezza a riposo = 0



$$\underline{F} = -K\,OP$$

K è detta costante elastica della molla $\left(\frac{N}{m}\right)$

FORZE DIPENDENTI DALLA VELOCITÀ

$\underline{F} = \underline{F}(\underline{v}_P)$ esempio: resistenza viscosa

$$\underline{F} = -c\,|\underline{v}_P|\,\hat{v}_P \qquad c > 0$$

$$\underline{F} = -c'|v_P|^2\hat{v}_P \qquad c' > 0$$

$$\underline{F} = -c'' f(|v|)\,\hat{v} \qquad f(|v|) > 0$$
$$c'' > 0$$

FORZE DIPENDENTI DAL TEMPO

$\underline{F} = \underline{F}(t)$ trazione esercitata da un filo variabile nel tempo con legge nota

CASO GENERALE $\underline{F} = \underline{F}(P, \underline{v}, t)$

$$\underline{F} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)\,\hat{\imath} + F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)\,\hat{\jmath} + F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)\,\hat{k}$$

$$\underline{F} = m\underline{a} \qquad \underline{a} = \ddot{x}(t)\,\hat{\imath} + \ddot{y}(t)\,\hat{\jmath} + \ddot{z}(t)\,\hat{k}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} = F_y(- - - - - -) \\ m\ddot{z} = F_z(- - - - - -) \end{cases}$$

Vogliamo trovare $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ soluzioni di questo sistema di equazioni differenziali accoppiate

Per poter fare questo occorre fornire oltre alle forze anche le condizioni iniziali

$$\underset{t_0}{x(0)} \quad \underset{t_0}{y(0)} \quad \underset{t_0}{z(0)} \quad \underset{t_0}{\dot{x}(0)} \quad \underset{t_0}{\dot{y}(0)} \quad \underset{t_0}{\dot{z}(0)}$$

Sotto opportune condizioni sulle funzioni F_x, F_y, F_z (Lipschitzianità ....) $\exists!$ della soluzione $x(t), y(t), z(t)$ in un intorno dell'istante di tempo t_0

$\exists\, \delta > 0$ tale che $\forall\ t \in [t_0, t_0 + \delta)$

esiste ed è unico il vettore

$OP(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ che descrive il moto del punto materiale P sottoposto all'azione della forza $\underline{F}$