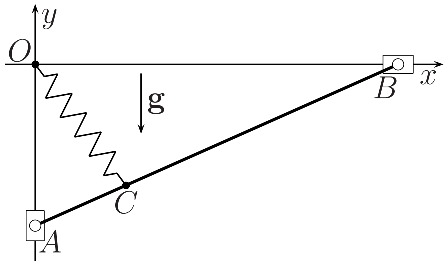
C. d. L. in Ing. Meccanica e Ing. Nucleare	Cognome
Compito scritto di Meccanica Razionale	Nome
11/01/2010	Matricola
	Corso di Laurea

1. Sono dati la curva γ di equazioni parametriche (rispetto a una terna $\mathcal{T} \equiv (O,x,y,z)$ di versori $\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}},\hat{\mathbf{k}}$) $\begin{cases} x = a(\sin(\theta)-\theta) \\ y = a(\sin(\theta)+\theta) \\ z = -a\sqrt{2}\cos(\theta) \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R},\ a > 0)$ e un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi (senza attrito) su γ. È presente la gravità, diretta come l'asse z e orientata nel verso negativo.
   a) Determinare la parametrizzazione di γ in funzione dell'ascissa curvilinea s di P, prendendo come origine $\Omega \equiv (0,0,-a\sqrt{2})$ su γ. (1.5 punti)
   b) Determinare le componenti del triedro principale $\hat{\mathbf{t}},\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{b}}$ rispetto ai versori di $\mathcal{T}$ e il raggio di curvatura di γ in un suo punto generico. (4 punti)
   c) Scrivere l'espressione dell'energia potenziale di P; calcolarne le eventuali posizioni di equilibrio, determinando se sono stabili o no. (2 punti)
   d) Scrivere l'equazione del moto di P usando l'equazione di Lagrange e ricavare il periodo delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabile. (2.5 punti)
   e) Scrivere le equazioni del moto per P lungo le componenti del triedro principale e ricavare da esse le componenti della reazione vincolare dinamica supponendo di conoscere $s(t)$ oppure $\theta(t)$. (2 punti)

2. Una sbarra omogenea AB di lunghezza l e massa m ha gli estremi vincolati a scorrere (senza attrito) lungo gli assi y e x (rispettivamente) di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy "fisso" nello spazio. È presente la gravità $\mathbf{g}$, diretta come l'asse y e orientata nel verso negativo. Una molla di costante elastica $k = \dfrac{2m|\mathbf{g}|}{l}$ e lunghezza a riposo nulla unisce il punto O a un punto C della sbarra tale che $AB = 4AC$.



   a) Determinare le posizioni di equilibrio della sbarra utilizzando il principio dei lavori virtuali. (3.5 punti)
   b) Utilizzando le equazioni cardinali della statica e le proprietà fisiche dei vincoli lisci, ricavare le reazioni vincolari agenti sulla sbarra nelle posizioni di equilibrio trovate al punto a). (2 punti)
   c) Scrivere l'energia meccanica della sbarra in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana e della sua derivata, e ricavare da essa l'equazione del moto della sbarra. (2.5 punti)

3. Data una terna "fissa" $\mathcal{T} \equiv (O,x,y,z)$ di versori $\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}},\hat{\mathbf{k}}$, consideriamo 4 punti materiali P_1 di massa m, P_2 di massa m, P_3 di massa $2m$, P_4 di massa $2m$ rigidamente collegati fra loro e con O da 10 aste inestensibili e prive di massa in modo da formare un sistema rigido $\mathcal{S}$. All'istante di tempo $t=0$ si ha $P_1 \equiv (a,-2a,a)$, $P_2 \equiv (a,0,-a)$, $P_3 \equiv (a,a,0)$, $P_4 \equiv (0,a,a)$, con $a > 0$ costante.
   a) Calcolare il tensore di inerzia di $\mathcal{S}$ rispetto alla terna $\mathcal{T}$ all'istante di tempo $t=0$. (2 punti)
   b) Definiamo una terna "mobile" $\mathcal{T}_* \equiv (O,x_*,y_*,z_*)$ di versori $\hat{\mathbf{i}}_* = \cos^2(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\hat{\mathbf{j}} - \sin(\theta)\hat{\mathbf{k}}$; $\hat{\mathbf{j}}_* = -\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{j}}$; $\hat{\mathbf{k}}_* = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin^2(\theta)\hat{\mathbf{j}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{k}}$, con $\theta = \Omega t$ e $\Omega > 0$ costante. $\mathcal{T}_*$ coincide con $\mathcal{T}$ per $t=0$; supponiamo inoltre che $\mathcal{S}$ si muova rimanendo solidale a $\mathcal{T}_*$ e vincolato a una cerniera sferica liscia posta in O. Calcolare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di $\mathcal{S}$ esprimendo le sue componenti sia rispetto ai versori di $\mathcal{T}_*$ che a quelli di $\mathcal{T}$. (4 punti)
   c) Determinare l'equazione cartesiana del cono fisso e del cono mobile di Poinsot. (2 punti)
   d) Calcolare l'energia cinetica e il momento angolare di $\mathcal{S}$ rispetto ad O in funzione di t, esprimendo le componenti di quest'ultimo sia rispetto ai versori di $\mathcal{T}_*$ che rispetto ai versori di $\mathcal{T}$. (2.5 punti)
   e) Utilizzando le equazioni di Eulero, calcolare le componenti (rispetto ai versori di $\mathcal{T}_*$) del momento rispetto ad O delle forze attive esterne che consentono di realizzare il moto di $\mathcal{S}$ definito al punto b). (1.5 punti)

1		
2		
3		