

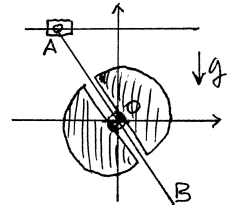
Cognome
Nome
Matricola
Corso di Laurea

1. Sono dati la curva γ di equazioni parametriche (rispetto a una terna $\mathcal{T} \equiv (O, x, y, z)$ di versori $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$)
- $$\begin{cases} x = ae^\theta \sin(\theta) \\ y = ae^\theta \\ z = -ae^\theta \cos(\theta) \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R}, a > 0)$$
- e un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi (senza

attrito) su γ . È presente la gravità, diretta come l'asse z e orientata nel verso negativo.

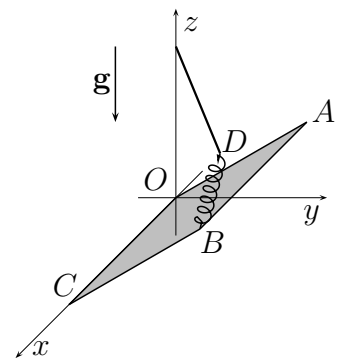
- Determinare la parametrizzazione di γ in funzione dell'ascissa curvilinea s di P , prendendo come origine $\Omega \equiv (0, a, -a)$ su γ . (1.5 punti)
- Determinare le componenti del triedro principale $\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}$ rispetto ai versori di \mathcal{T} e il raggio di curvatura di γ in un suo punto generico. (3 punti)
- Scrivere l'espressione dell'energia potenziale di P ; calcolarne le eventuali posizioni di equilibrio, determinando se sono stabili o no. (2 punti)
- Scrivere l'equazione del moto di P usando l'equazione di Lagrange e ricavare il periodo delle piccole oscillazioni intorno a **tutte** le posizioni di equilibrio stabile. (3.5 punti)
- Scrivere le equazioni del moto per P lungo le direzioni del triedro principale e ricavare da esse le componenti della reazione vincolare dinamica supponendo di conoscere $s(t)$. (2 punti)

2. Un disco omogeneo di raggio r , massa m , ha il proprio centro O incernierato a una cerniera fissa e presenta una scanalatura lungo un diametro entro la quale può scorrere senza attrito una sbarra AB di lunghezza $4r$ e massa m . È presente la gravità. L'estremo A della sbarra è vincolato a una cerniera mobile vincolata a sua volta a muoversi lungo una guida orizzontale fissa posta al di sopra del disco. Quando la sbarra è verticale, O coincide geometricamente col punto medio della sbarra. Tutti i vincoli sono privi di attrito.



- Dopo aver scelto un opportuno sistema di riferimento "fisso" e un'opportuna coordinata lagrangiana θ per descrivere la configurazione del sistema, ricavare la posizione e la velocità di A in funzione di θ e $\dot{\theta}$, e di un qualunque punto P della sbarra in funzione di \overline{AP} , θ e $\dot{\theta}$. (2 punti)
- Mostrare che per ogni θ compreso in un opportuno intervallo esiste ed è unico un punto Q della sbarra tale che \mathbf{v}_Q è parallelo ad AB ; determinare gli estremi di tale intervallo e calcolare il vettore OQ . (2 punti)
- Calcolare la velocità $\mathbf{v}^{(r)}$ di strisciamento dei punti della sbarra a contatto con il disco in funzione di θ e delle sue derivate. (1.5 punti)
- Ricavare la posizione del centro istantaneo di rotazione e le equazioni parametriche e cartesiane della polare fissa e della polare mobile. (4 punti)
- Calcolare la posizione del baricentro del sistema in funzione di θ e il momento angolare del sistema rispetto a O in funzione di θ e delle sue derivate. (2.5 punti)

3. Una lamina quadrata omogenea $OABC$ di lato l e massa m è incernierata nei suoi punti O e C in modo da poter ruotare (senza poter traslare) intorno all'asse orizzontale x . È presente la gravità \mathbf{g} , diretta come l'asse z e orientata nel verso negativo. Una molla di costante elastica $k = \frac{m|\mathbf{g}|}{4l}$ e di lunghezza a riposo nulla ha un suo estremo bloccato nel punto $D \equiv (l, l, l)$, l'altro estremo è attaccato al punto B .



- Dopo aver scelto un'opportuna coordinata lagrangiana, determinare gli spostamenti virtuali dei punti di applicazione delle forze attive esterne e i lavori virtuali di tali forze. Calcolare infine le posizioni di equilibrio della lamina utilizzando il principio dei lavori virtuali. (3.5 punti)
- Scrivere le equazioni cardinali della statica, e ricavare le reazioni vincolari in O e C nelle posizioni di equilibrio trovate al punto a). (Ipotizziamo che le coppie rotoidali non esercitino forze dirette lungo il proprio asse di rotazione) (3 punti)
- Scrivere l'energia meccanica della lamina, e ricavare l'equazione del moto usando un opportuno principio di conservazione. (1.5 punti)

1		
2		
3		