C. d. L. in Ing. Meccanica e Ing. Nucleare
Compito scritto di Meccanica Razionale 11/01/2010

1) Sono dati la curva γ di equazioni parametriche (rispetto a una terna $\mathcal{T} \equiv (O, x, y, z)$ di versori $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$) $\begin{cases} x = a(\sin(\theta) - \theta) \\ y = a(\sin(\theta) + \theta) \\ z = -a\sqrt{2}\cos(\theta) \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R},\ a > 0)$ e un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi (senza attrito) su γ. È presente la gravità, diretta come l'asse z e orientata nel verso negativo.

a) Determinare la parametrizzazione di γ in funzione dell'ascissa curvilinea s di P, prendendo come origine $\Omega \equiv (0, 0, -\sqrt{2}a)$ su γ.

$ds = a\sqrt{(\cos(\theta)-1)^2 + (\cos(\theta)+1)^2 + 2\sin^2(\theta)}d\theta = a\sqrt{\cos^2(\theta)+1-2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)+1+2\cos(\theta)+2\sin^2(\theta)}d\theta =$ $a\sqrt{2\cos^2(\theta)+2+2\sin^2(\theta)}d\theta = 2ad\theta$, quindi $s = 2a\theta$ e $\theta = \dfrac{s}{2a}$. La parametrizzazione naturale di γ è quindi

$$\begin{cases} x = a\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right) - \dfrac{s}{2} \\ y = a\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right) + \dfrac{s}{2} \\ z = -a\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right) \end{cases}$$

b) Determinare le componenti del triedro principale $\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}$ rispetto ai versori di $\mathcal{T}$ in un punto generico di γ.

$\hat{\mathbf{t}} = \dfrac{dx}{ds}\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{dy}{ds}\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{dz}{ds}\hat{\mathbf{k}} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right)-1\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right)+1\right)\hat{\mathbf{j}} + \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right)\hat{\mathbf{k}}\right] = -\sin^2\left(\dfrac{s}{4a}\right)\hat{\mathbf{i}} + \cos^2\left(\dfrac{s}{4a}\right)\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right)\hat{\mathbf{k}}$ $= -\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{i}} + \cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)\,\hat{\mathbf{k}}$.

Si ha poi $\dfrac{1}{R_c} = \sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2s}{ds^2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sin^2\left(\frac{s}{2a}\right)}{4a^2} + \dfrac{\sin^2\left(\frac{s}{2a}\right)}{4a^2} + 2\dfrac{\cos^2\left(\frac{s}{2a}\right)}{4a^2}} = \dfrac{1}{2a\sqrt{2}}$, da cui $R_c = 2a\sqrt{2}$.

Quindi $\hat{\mathbf{n}} = R_c\dfrac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = -a\sqrt{2}\left[\dfrac{\sin\left(\frac{s}{2a}\right)}{2a}\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{\sin\left(\frac{s}{2a}\right)}{2a}\hat{\mathbf{j}} - \sqrt{2}\dfrac{\cos\left(\frac{s}{2a}\right)}{2a}\hat{\mathbf{k}}\right] = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right)(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}})\right] + \cos\left(\dfrac{s}{2a}\right)\hat{\mathbf{k}}$.

Infine $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \wedge \hat{\mathbf{n}} = \dfrac{1}{2}\left(\cos^2\left(\dfrac{s}{2a}\right) + \cos\left(\dfrac{s}{2a}\right) + \sin^2\left(\dfrac{s}{2a}\right)\right)\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{1}{2}\left(-\cos^2\left(\dfrac{s}{2a}\right) + \cos\left(\dfrac{s}{2a}\right) - \sin^2\left(\dfrac{s}{2a}\right)\right)\hat{\mathbf{j}} -$ $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right)\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right) - \sin\left(\dfrac{s}{2a}\right) - \sin\left(\dfrac{s}{2a}\right)\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right) - \sin\left(\dfrac{s}{2a}\right)\right)\hat{\mathbf{k}} = \dfrac{1}{2}\left(1+\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right)\right)\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{1}{2}\left(-1+\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right)\right)\hat{\mathbf{j}} +$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right)\hat{\mathbf{k}} = \cos^2\left(\dfrac{s}{4a}\right)\hat{\mathbf{i}} - \sin^2\left(\dfrac{s}{4a}\right)\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right)\hat{\mathbf{k}}$.

c) Scrivere l'espressione dell'energia potenziale di P; calcolarne le eventuali posizioni di equilibrio, determinando se sono stabili o no.

Si ha $U = mgz = -mga\sqrt{2}\cos(\theta)$, con $m > 0$, $g > 0$. Le posizioni di equilibrio si hanno per $\dfrac{dU}{d\theta} = 0$, da cui $mga\sqrt{2}\sin(\theta) = 0$, cioè $\theta = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Per determinare quali sono stabili e quali no, calcoliamo $\dfrac{d^2U}{d\theta^2} = mga\sqrt{2}\cos(\theta)$. Si ha $\left.\dfrac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=2k\pi} = mga\sqrt{2} > 0$, quindi per $\theta = 2k\pi$ (cioè $s = 4ak\pi$) si hanno posizioni di equilibrio stabile. Si ha infine $\left.\dfrac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=(2k+1)\pi} = -mga\sqrt{2} < 0$, quindi per $\theta = (2k+1)\pi$ (cioè $s = 2a(2k+1)\pi$) si hanno posizioni di equilibrio instabile.

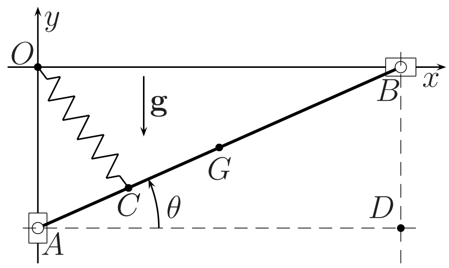
d) Scrivere l'equazione del moto di P usando l'equazione di Lagrange e ricavare il periodo delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabile.

Si ha $T = \dfrac{1}{2}m\dot{s}^2$, $U = -mga\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right)$, $\mathcal{L} = T - U = \dfrac{1}{2}m\dot{s}^2 + mga\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right)$; da $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = 0$ si ottiene $m\ddot{s} + \dfrac{mg}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right) = 0$, da cui $\ddot{s} + \dfrac{g}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right) = 0$. Sviluppando in serie il termine non lineare (intorno alle posizioni s_k di equilibrio stabile, cioè per $s_k = 4ak\pi$) si ha, posto $\tilde{s}_k = s - 4ak\pi$, $\sin\left(\dfrac{\tilde{s}+4ak\pi}{2a}\right) = \sin\left(\dfrac{\tilde{s}}{2a} + 2k\pi\right) =$ $\sin\left(\dfrac{\tilde{s}}{2a}\right) = \dfrac{\tilde{s}}{2a} + o\left(\dfrac{\tilde{s}}{2a}\right)$. Sostituendo nell'equazione del moto si ha $\ddot{\tilde{s}} + \dfrac{g}{2a\sqrt{2}}\tilde{s} = 0$ che è l'equazione di un moto armonico di pulsazione $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{2a\sqrt{2}}}$ e periodo $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{2a\sqrt{2}}{g}}$, lo stesso per tutti i valori di k.

e) Scrivere le equazioni del moto per P lungo le componenti della triedro principale e ricavare da esse le componenti della reazione vincolare dinamica supponendo di conoscere $s(t)$ oppure $\theta(t)$.

L'equazione del moto è $m\mathbf{a}=m\mathbf{g}+\boldsymbol{\phi}$. Scomponiamo tale equazione lungo le direzioni della terna intrinseca di γ ponendo $\boldsymbol{\phi}=\phi_n\hat{\mathbf{n}}+\phi_b\hat{\mathbf{b}}$; si ottiene $m\left(\ddot{s}\hat{\mathbf{t}}+\dfrac{\dot{s}^2}{R_c}\hat{\mathbf{n}}\right)=-mg\hat{\mathbf{k}}+\phi_n\hat{\mathbf{n}}+\phi_b\hat{\mathbf{b}}$. Poiché $\hat{\mathbf{k}}=(\hat{\mathbf{k}}\boldsymbol{.}\hat{\mathbf{t}})\hat{\mathbf{t}}+(\hat{\mathbf{k}}\boldsymbol{.}\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}+(\hat{\mathbf{k}}\boldsymbol{.}\hat{\mathbf{b}})\hat{\mathbf{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right)\hat{\mathbf{t}}+\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right)\hat{\mathbf{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right)\hat{\mathbf{b}}$, si ottiene $m\ddot{s}=-mg\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right)$, già ottenuta al punto d), $m\dfrac{\dot{s}^2}{2a\sqrt{2}}=-mg\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right)+\phi_n$ e $0=-mg\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right)+\phi_b$. Quindi $\phi_n=mg\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right)+\dfrac{m\dot{s}^2}{2a\sqrt{2}}$ e $\phi_b=\dfrac{mg}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{s}{2a}\right)$. Poiché $E=\dfrac{1}{2}m\dot{s}^2-mga\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right)=\text{costante}$, $\phi_n=mg\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right)+\dfrac{E}{a\sqrt{2}}+mg\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right)=\dfrac{E}{a\sqrt{2}}+2mg\cos\left(\dfrac{s}{2a}\right)$.

2) Una sbarra omogenea AB di lunghezza l e massa m ha gli estremi vincolati a scorrere (senza attrito) lungo gli assi y e x (rispettivamente) di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy "fisso" nello spazio. È presente la gravità $\mathbf{g}$, diretta come l'asse y e orientata nel suo verso negativo. Una molla di costante elastica $k=\dfrac{2m|\mathbf{g}|}{l}$ e lunghezza a riposo nulla unisce il punto O a un punto C della sbarra tale che $AB=4AC$.



a) Determinare le posizioni di equilibrio della sbarra utilizzando il principio dei lavori virtuali.
Poniamo $|\mathbf{g}|=g$, e scegliamo come coordinata l'angolo θ che la sbarra AB forma con la parallela all'asse x passante per A, $0\le\theta<2\pi$. Si ha $OC=\dfrac{l}{4}\left(\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}}-3\sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}\right)$ e, detto G il baricentro della sbarra, $CG=\dfrac{l}{4}\left(\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}}+\sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}\right)$. Le forze attive esterne agenti sulla sbarra sono il peso $\mathbf{P}=m\mathbf{g}=-mg\hat{\mathbf{j}}$ e la forza della molla $\mathbf{F}=-kOC=-\dfrac{mg}{2}\left(\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}}-3\sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}\right)$. Il risultante è $\mathbf{R}^{(\mathrm{a,e})}=\mathbf{P}+\mathbf{F}=-\dfrac{mg}{2}\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}}+mg\left(\dfrac{3}{2}\sin(\theta)-1\right)\hat{\mathbf{j}}$.
Per utilizzare il PLV è conveniente scegliere il punto C (uno dei punti al quale è applicata una delle due forze).
Si ha $\delta C=-\dfrac{l}{4}\left(\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}}+3\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}}\right)\delta\theta$; $\mathbf{M}_C^{(\mathrm{a,e})}=CG\wedge\mathbf{P}=-\dfrac{l}{4}\left(\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}}+\sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}\right)\wedge mg\hat{\mathbf{j}}=-\dfrac{mgl}{4}\cos(\theta)\hat{\mathbf{k}}$.
Il PLV fornisce $\delta L^{(\mathrm{a,e})}=\mathbf{R}^{(\mathrm{a,e})}\boldsymbol{.}\delta C+\mathbf{M}_C^{(\mathrm{a,e})}\boldsymbol{.}\delta\theta\hat{\mathbf{k}}=0$ per ogni spostamento virtuale compatibile coi vincoli, cioè $-\left(-\dfrac{mg}{2}\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}}+mg\left(\dfrac{3}{2}\sin(\theta)-1\right)\hat{\mathbf{j}}\right)\boldsymbol{.}\dfrac{l}{4}\left(\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}}+3\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}}\right)\delta\theta-\dfrac{mgl}{4}\cos(\theta)\hat{\mathbf{k}}\boldsymbol{.}\delta\theta\hat{\mathbf{k}}=0\,\forall\delta\theta$, da cui
$\left(\dfrac{mgl}{8}\cos(\theta)\sin(\theta)-\dfrac{3mgl}{4}\left(\dfrac{3}{2}\sin(\theta)-1\right)\cos(\theta)-\dfrac{mgl}{4}\cos(\theta)\right)\delta\theta=0\,\forall\delta\theta$, vale a dire
$\cos(\theta)\left(\dfrac{mgl}{8}\sin(\theta)-\dfrac{9mgl}{8}\sin(\theta)+\dfrac{3mgl}{4}-\dfrac{mgl}{4}\right)=0$ ed infine $\cos(\theta)\left(-\sin(\theta)+\dfrac{1}{2}\right)=0$. Le posizioni di equilibrio si hanno quindi per i seguenti valori di θ: $\theta_1=\dfrac{\pi}{6}$, $\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$, $\theta_3=\dfrac{5\pi}{6}$, $\theta_4=\dfrac{3\pi}{2}$.

b) Utilizzando le equazioni cardinali della statica e le proprietà fisiche dei vincoli lisci, ricavare le reazioni vincolari statiche agenti sulla sbarra nelle posizioni di equilibrio trovate al punto a).
Si ha $\mathbf{R}^{(\mathrm{a,e})}+\mathbf{R}^{(\mathrm{v,e})}=\mathbf{0}$; $\mathbf{R}^{(\mathrm{v,e})}=\boldsymbol{\phi}_A+\boldsymbol{\phi}_B$. Poiché i vincoli sono lisci, si ha $\boldsymbol{\phi}_A=\phi_A\hat{\mathbf{i}}$, $\boldsymbol{\phi}_B=\phi_B\hat{\mathbf{j}}$. Utilizzando l'espressione per $\mathbf{R}^{(\mathrm{a,e})}$ trovata sopra, si ha $-\dfrac{mg}{2}\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}}+mg\left(\dfrac{3}{2}\sin(\theta)-1\right)\hat{\mathbf{j}}+\phi_A\hat{\mathbf{i}}+\phi_B\hat{\mathbf{j}}=\mathbf{0}$. Analizzando le due componenti si ha $\phi_A=\dfrac{mg}{2}\cos(\theta)$, $\phi_B=mg\left(1-\dfrac{3}{2}\sin(\theta)\right)$, relazioni che sono vere purché al posto di θ si sostituiscano i valori corrispondenti alle 4 posizioni di equilibrio. Si ha quindi $\boldsymbol{\phi}_{A1}=\dfrac{mg\sqrt{3}}{4}\hat{\mathbf{i}}$, $\boldsymbol{\phi}_{B1}=\dfrac{mg}{4}\hat{\mathbf{j}}$; $\boldsymbol{\phi}_{A2}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\phi}_{B2}=-\dfrac{mg}{2}\hat{\mathbf{j}}$; $\boldsymbol{\phi}_{A3}=-\dfrac{mg\sqrt{3}}{4}\hat{\mathbf{i}}$, $\boldsymbol{\phi}_{B3}=\dfrac{mg}{4}\hat{\mathbf{j}}$; $\boldsymbol{\phi}_{A4}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\phi}_{B4}=\dfrac{5mg}{2}\hat{\mathbf{j}}$.

c) Scrivere l'energia meccanica della sbarra in funzione di un'opportuna coordinata lagrangiana e della sua derivata, e ricavare l'equazione del moto della sbarra da un opportuno principio di conservazione.
Indicando con D il CIR della sbarra, si ha $T=\dfrac{1}{2}I_{\hat{\mathbf{k}},D}\dot{\theta}^2$; si ha poi $I_{\hat{\mathbf{k}},D}=I_{\hat{\mathbf{k}},G}+m\overline{GD}^2=\dfrac{1}{12}ml^2+m\dfrac{l^2}{4}=\dfrac{1}{3}ml^2$, quindi $T=\dfrac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$. $U=\dfrac{k\overline{OC}^2}{2}+mgy_G=\dfrac{1}{2}\dfrac{2mg}{l}\dfrac{l^2}{16}(\cos^2(\theta)+9\sin^2(\theta))-\dfrac{mgl}{2}\sin(\theta)=\dfrac{mgl}{2}\sin^2(\theta)-\dfrac{mgl}{2}\sin(\theta)+C$.
Quindi $E=T+U=\dfrac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2+\dfrac{mgl}{2}\sin^2(\theta)-\dfrac{mgl}{2}\sin(\theta)$. Poiche le forze agenti sulla sbarra sono conservative oppure non compiono lavoro, $E=\text{costante}$, cioè $\dot{E}=0$. Quindi $\dfrac{1}{3}ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+mgl\dot{\theta}\sin(\theta)\cos(\theta)-\dfrac{mgl\dot{\theta}}{2}\cos(\theta)=0$, da cui $\ddot{\theta}+\dfrac{3g}{2l}\cos(\theta)(2\sin(\theta)-1)=0$ che è l'equazione richiesta.

3) Data una terna "fissa" $\mathcal{T} \equiv (O,x,y,z)$ di versori $\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}},\hat{\mathbf{k}}$, consideriamo 4 punti materiali P_1 di massa m, P_2 di massa m, P_3 di massa $2m$, P_4 di massa $2m$ rigidamente collegati fra loro e con O da 10 aste inestensibili e prive di massa in modo da formare un sistema rigido $\mathcal{S}$. All'istante di tempo $t=0$ si ha $P_1 \equiv (a,-2a,a)$, $P_2 \equiv (a,0,-a)$, $P_3 \equiv (a,a,0)$, $P_4 \equiv (0,a,a)$, con $a>0$ costante.

a) Calcolare il tensore di inerzia di $\mathcal{S}$ rispetto alla terna $\mathcal{T}$ all'istante $t=0$.
Si ha $A=5ma^2+ma^2+2ma^2+2m\cdot 2a^2=12ma^2$; $B=m\cdot 2a^2+m\cdot 2a^2+2ma^2+2ma^2=8ma^2$; $C=5ma^2+ma^2+2m\cdot 2a^2+2m\cdot a^2=12ma^2$; $D=-2ma^2+0+0+2ma^2=0$; $E=ma^2-ma^2+0+0=0$ $F=ma\cdot(-2a)+0+2ma\cdot a+0=0$, quindi $I=4ma^2\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ che è un tensore diagonale, quindi $\mathcal{T}$ al tempo $t=0$ è una terna principale di inerzia per $\mathcal{S}$.

b) Definiamo una terna "mobile" $\mathcal{T}_* \equiv (O,x_*,y_*,z_*)$ di versori $\hat{\mathbf{i}}_*=\cos^2(\theta)\hat{\mathbf{i}}+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\hat{\mathbf{j}}-\sin(\theta)\hat{\mathbf{k}}$; $\hat{\mathbf{j}}_*=-\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}}+\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}}$; $\hat{\mathbf{k}}_*=\frac{1}{2}\sin(2\theta)\hat{\mathbf{i}}+\sin^2(\theta)\hat{\mathbf{j}}+\cos(\theta)\hat{\mathbf{k}}$, con $\theta=\Omega t$ e $\Omega>0$ costante. $\mathcal{T}_*$ coincide con $\mathcal{T}$ per $t=0$; supponiamo inoltre che $\mathcal{S}$ si muova rimanendo solidale a $\mathcal{T}_*$ e vincolato a una cerniera sferica liscia posta in O. Calcolare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di $\mathcal{S}$ esprimendo le sue componenti sia rispetto ai versori di $\mathcal{T}$ che a quelli di $\mathcal{T}_*$.
Le derivate dei versori di $\mathcal{T}_*$ sono: $\dfrac{d\hat{\mathbf{i}}_*}{dt}=\Omega(-\sin(2\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\cos(2\Omega t)\hat{\mathbf{j}}-\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{k}})$; $\dfrac{d\hat{\mathbf{j}}_*}{dt}=-\Omega(\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{j}})$; $\dfrac{d\hat{\mathbf{k}}_*}{dt}=\Omega(\cos(2\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\sin(2\Omega t)\hat{\mathbf{j}}-\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{k}})$. Le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ in $\mathcal{T}_*$ sono:
$p=\dfrac{d\hat{\mathbf{j}}_*}{dt}\cdot\hat{\mathbf{k}}_*=-\Omega(\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{j}})\cdot(\dfrac{1}{2}\sin(2\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\sin^2(\Omega t)\hat{\mathbf{j}}+\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{k}})=-\Omega(\sin(\Omega t)\cos^2(\Omega t)+\sin^3(\Omega t))=-\Omega\sin(\Omega t)(\cos^2(\Omega t)+\sin^2(\Omega t))=-\Omega\sin(\Omega t)$;
$q=\dfrac{d\hat{\mathbf{k}}_*}{dt}\cdot\hat{\mathbf{i}}_*=\Omega(\cos(2\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\sin(2\Omega t)\hat{\mathbf{j}}-\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{k}})\cdot(\cos^2(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\dfrac{1}{2}\sin(2\Omega t)\hat{\mathbf{j}}-\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{k}})=\Omega(\cos(2\Omega t)\cos^2(\Omega t)+\dfrac{1}{2}\sin^2(2\Omega t)+\sin^2(\Omega t))=\Omega(\cos^4(\Omega t)-\sin^2(\Omega t)\cos^2(\Omega t)+2\sin^2(\Omega t)\cos^2(\Omega t)+\sin^2(\Omega t))=\Omega(\cos^4(\Omega t)+\sin^2(\Omega t)\cos^2(\Omega t)+\sin^2(\Omega t))=\Omega(\cos^2(\Omega t)(\cos^2(\Omega t)+\sin^2(\Omega t))+\sin^2(\Omega t))=\Omega(\cos^2(\Omega t)+\sin^2(\Omega t))=\Omega$;
$r=\dfrac{d\hat{\mathbf{i}}_*}{dt}\cdot\hat{\mathbf{j}}_*=\Omega(-\sin(2\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\cos(2\Omega t)\hat{\mathbf{j}}-\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{k}})\cdot(-\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{j}})=\Omega(\sin(2\Omega t)\sin(\Omega t)+\cos(2\Omega t)\cos(\Omega t))=\Omega\cos(2\Omega t-\Omega t)=\Omega\cos(\Omega t)$. Si ha quindi $\boldsymbol{\omega}=p\hat{\mathbf{i}}_*+q\hat{\mathbf{j}}_*+r\hat{\mathbf{k}}_*=\Omega(-\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}_*+\hat{\mathbf{j}}_*+\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{k}}_*)$. L'espressione di $\boldsymbol{\omega}$ nella terna $\mathcal{T}$ è $\boldsymbol{\omega}=\Omega\Big[-\sin(\Omega t)(\cos^2(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\frac{1}{2}\sin(2\Omega t)\hat{\mathbf{j}}-\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{k}})+(-\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{j}})+\cos(\Omega t)(\frac{1}{2}\sin(2\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\sin^2(\Omega t)\hat{\mathbf{j}}+\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{k}})\Big]=\Omega\Big[(-\sin(\Omega t)\cos^2(\Omega t)-\sin(\Omega t)+\sin(\Omega t)\cos^2(\Omega t))\hat{\mathbf{i}}+(-\sin^2(\Omega t)\cos(\Omega t)+\cos(\Omega t)+\sin^2(\Omega t)\cos(\Omega t))\hat{\mathbf{j}}+(\sin^2(\Omega t)+\cos^2(\Omega t))\hat{\mathbf{k}}\Big]=\Omega(-\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})$.

c) Determinare l'equazione cartesianadel cono fisso e del cono mobile di Poinsot.
Anche se non è espressamente richiesto dal testo, è utile osservare che $|\boldsymbol{\omega}|=\sqrt{2}\Omega=$ costante. Inoltre si ha $\dfrac{\boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\mathbf{k}}}{|\boldsymbol{\omega}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, cioè l'angolo fra $\boldsymbol{\omega}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ è costante nel tempo e vale $\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{\boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\mathbf{j}}_*}{|\boldsymbol{\omega}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, cioè anche l'angolo fra $\boldsymbol{\omega}$ e $\hat{\mathbf{j}}_*$ è costante nel tempo e vale $\dfrac{\pi}{4}$. Quindi la punta di $\boldsymbol{\omega}$ (immaginandolo come un vettore applicato in O) si muove di moto circolare uniforme sia in $\mathcal{T}$ che in $\mathcal{T}_*$, e in entrambe le terne, ad ogni istante t, il vettore $\boldsymbol{\omega}$ appartiene a una delle generatrici di un cono circolare retto avente vertice in O e semiapertura $\dfrac{\pi}{4}$.
Anche senza aver svolto le considerazioni esposte sopra, si ha che nella terna $\mathcal{T}$ il vettore $\boldsymbol{\omega}$ ad un istante t è diretto lungo la retta di equazioni parametriche $\begin{cases}x=-s\Omega\sin(\Omega t)\\ y=s\Omega\cos(\Omega t)\\ z=s\Omega\end{cases}$ (per la precisione, giace sulla semiretta che si ottiene per $s\geq 0$). Elevando al quadrato le prime due equazioni e sommandole fra loro, si ha $x^2+y^2=\Omega^2 s^2$. D'altronde dalla terza equazione si ha $z^2=\Omega^2 s^2$, quindi l'equazione del cono fisso di Poinsot è $x^2+y^2-z^2=0$, con $z\geq 0$. Analogamente, nella terna $\mathcal{T}_*$ il vettore $\boldsymbol{\omega}$ ad un istante t è diretto lungo la retta di equazioni parametriche $\begin{cases}x_*=-s\Omega\sin(\Omega t)\\ y_*=s\Omega\\ z_*=s\Omega\cos(\Omega t)\end{cases}$ (per la precisione, giace sulla semiretta che si ottiene per $s\geq 0$). Elevando al quadrato la prima e la terza equazione e sommandole fra loro, si ha ${x_*}^2+{z_*}^2=\Omega^2 s^2$. D'altronde dalla seconda equazione si ha ${y_*}^2=\Omega^2 s^2$, quindi l'equazione del cono mobile di Poinsot è ${x_*}^2-{y_*}^2+{z_*}^2=0$, con $y_*\geq 0$.

d) Calcolare l'energia cinetica e il momento angolare di $\mathcal{S}$ rispetto ad O in funzione di t, esprimendo le componenti di quest'ultimo sia rispetto ai versori di $\mathcal{T}$ che rispetto ai versori di $\mathcal{T}_*$.

$T=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} I \boldsymbol{\omega}=\dfrac{1}{2}4ma^2\Omega^2\begin{pmatrix}-\sin(\Omega t) & 1 & \cos(\Omega t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin(\Omega t)\\1\\\cos(\Omega t)\end{pmatrix}=2ma^2\Omega^2(3\sin^2(\Omega t)+2+3\cos^2(\Omega t))=$ $10ma^2\Omega^2=$ costante. Nella terna $\mathcal{T}_*$ si ha

$\mathbf{K}_O=I\boldsymbol{\omega}=4ma^2\Omega\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin(\Omega t)\\1\\\cos(\Omega t)\end{pmatrix}=4ma^2\Omega(-3\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}_*+2\hat{\mathbf{j}}_*+3\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{k}}_*)$. Rispetto a $\mathcal{T}$ si ha:

$\mathbf{K}_O=4ma^2\Omega(-3\sin(\Omega t)(\cos^2(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\dfrac{1}{2}\sin(2\Omega t)\hat{\mathbf{j}}-\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{k}})+2(-\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{j}})+3\cos(\Omega t)(\dfrac{1}{2}\sin(2\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+$ $\sin^2(\Omega t)\hat{\mathbf{j}}+\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{k}}))=4ma^2\Omega[(-3\sin(\Omega t)\cos^2(\Omega t)-2\sin(\Omega t)+3\cos^2(\Omega t)\sin(\Omega t))\hat{\mathbf{i}}+(-3\sin^2(\Omega t)\cos(\Omega t)+$ $2\cos(\Omega t)+3\cos(\Omega t)\sin^2(\Omega t))\hat{\mathbf{j}}+(3\sin^2(\Omega t)+3\cos^2(\Omega t))\hat{\mathbf{k}}]=4ma^2\Omega(-2\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+2\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}})$

Anche se non richiesto, giova alla comprensione del problema osservare che $|\mathbf{K}_O|=4\sqrt{13}ma^2\Omega=$ costante, ma che la direzione di $\mathbf{K}_O$ non è costante. Detto α l'angolo fra $\mathbf{K}_O$ e $\hat{\mathbf{j}}_*$, si ha $\cos(\alpha)=\dfrac{4ma^2\Omega\cdot 2}{4ma^2\Omega\sqrt{13}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}=$ costante. Detto β l'angolo fra $\mathbf{K}_O$ e $\hat{\mathbf{k}}$, si ha $\cos(\beta)=\dfrac{4ma^2\Omega\cdot 3}{4ma^2\Omega\sqrt{13}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}=$ costante. Detto γ l'angolo fra $\mathbf{K}_O$ e $\boldsymbol{\omega}$, si ha $\cos(\gamma)=\dfrac{4ma^2\Omega^2\cdot(3+2)}{4\sqrt{2}ma^2\Omega^2\sqrt{13}}=\dfrac{5}{\sqrt{26}}=$ costante. Infine, $\hat{\mathbf{j}}_*$, $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{K}_O$ (considerati come vettori applicati in O) giacciono sul piano (mobile in $\mathcal{T}_*$) $\cos(\Omega t)x_*+\sin(\Omega t)z_*=0$ per ogni t; $\hat{\mathbf{k}}$, $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{K}_O$ (considerati come vettori applicati in O) giacciono sul piano (mobile in $\mathcal{T}$) $\cos(\Omega t)x+\sin(\Omega t)y=0$ per ogni t.

e) Utilizzando le equazioni di Eulero, calcolare le componenti (rispetto ai versori di $\mathcal{T}_*$) del momento rispetto ad O delle forze attive esterne che consentono di realizzare il moto di $\mathcal{S}$ definito al punto b).

Posto $\mathbf{M}_O^{(\mathrm{a,e})}=M_{x_*}^{(\mathrm{a,e})}\hat{\mathbf{i}}_*+M_{y_*}^{(\mathrm{a,e})}\hat{\mathbf{j}}_*+M_{z_*}^{(\mathrm{a,e})}\hat{\mathbf{k}}_*$, si ha $\begin{cases}A\dot{p}-(B-C)qr=M_{x_*}^{(\mathrm{a,e})}\\B\dot{q}-(C-A)rp=M_{y_*}^{(\mathrm{a,e})}\\C\dot{r}-(A-B)pq=M_{z_*}^{(\mathrm{a,e})}\end{cases}$. Ponendo $A=12ma^2$, $B=8ma^2$, $C=12ma^2$ ricavati al punto a), e $p=-\Omega\sin(\Omega t)$, $q=\Omega$, $r=\Omega\cos(\Omega t)$ ricavati al punto b), si ottiene $\begin{cases}-12ma^2\Omega^2\cos(\Omega t)-(8ma^2-12ma^2)\Omega^2\cos(\Omega t)=M_{x_*}^{(\mathrm{a,e})}\\8ma^2\cdot 0-(12ma^2-12ma^2)-\Omega^2\sin(\Omega t)\cos(\Omega t)=M_{y_*}^{(\mathrm{a,e})}\\-12ma^2\Omega^2\sin(\Omega t)-(12ma^2-8ma^2)\Omega^2\sin(\Omega t)=M_{z_*}^{(\mathrm{a,e})}\end{cases}$, da cui $\begin{cases}-8ma^2\Omega^2\cos(\Omega t)=M_{x_*}^{(\mathrm{a,e})}\\0=M_{y_*}^{(\mathrm{a,e})}\\-8ma^2\Omega^2\sin(\Omega t)=M_{z_*}^{(\mathrm{a,e})}\end{cases}$; quindi $\mathbf{M}_O^{(\mathrm{a,e})}=-8ma^2\Omega^2(\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}_*+\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{k}}_*)$.

Presentiamo alcune considerazioni non richieste, ma interessanti. Si osservi che $\mathbf{M}_O^{(\mathrm{a,e})}\perp\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{M}_O^{(\mathrm{a,e})}\perp\mathbf{K}_O$ ad ogni istante di tempo. È possibile ottenere $\mathbf{M}_O^{(\mathrm{a,e})}$ utilizzando l'equazione cardinale $\dot{\mathbf{K}}_O=\mathbf{M}_O^{(\mathrm{a})}$, tenendo conto però che i versori di $\mathcal{T}_*$ dipendono dal tempo e vanno quindi derivati anch'essi. È più facile fare il calcolo nella terna $\mathcal{T}$, in cui $\dot{\mathbf{K}}_O=\dfrac{d}{dt}4ma^2\Omega(-2\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+2\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}})=-8ma^2\Omega^2(\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}+\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{j}})$; sostituendo le espressioni di $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$ in funzione dei versori di $\mathcal{T}_*$ si ottiene il risultato già mostrato. Si osservi infine che nella terna $\mathcal{T}$ il tensore d'inerzia dipende dal tempo. Trasformando I con la legge di trasformazione dei tensori, si ottiene $I_{\mathcal{T}}(t)=4ma^2\begin{pmatrix}3-\sin^2(\Omega t)\cos^2(\Omega t) & -\sin(\Omega t)\cos^2(\Omega t) & -\sin^3(\Omega t)\cos(\Omega t)\\-\sin(\Omega t)\cos^2(\Omega t) & 2+\sin^2(\Omega t) & -\sin^2(\Omega t)\cos(\Omega t)\\-\sin^3(\Omega t)\cos(\Omega t) & -\sin^2(\Omega t)\cos(\Omega t) & 3-\sin^4(\Omega t)\end{pmatrix}$ che è diagonale solo per $t=\dfrac{k\pi}{2\Omega}$, con $k\in\mathbb{Z}$.