C. d. L. in Ing. Meccanica e Ing. Nucleare
Compito scritto di Meccanica Razionale – 27/01/2010

1. Sono dati la curva γ di equazioni parametriche (rispetto a una terna $\mathcal{T} \equiv (O, x, y, z)$ di versori $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$) $\begin{cases} x = ae^{\theta}\sin(\theta) \\ y = ae^{\theta} \\ z = -ae^{\theta}\cos(\theta) \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R},\ a > 0)$ e un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi (senza attrito) su γ. È presente la gravità, diretta come l'asse z e orientata nel verso negativo.

a) Determinare la parametrizzazione di γ in funzione dell'ascissa curvilinea s di P, prendendo come origine $\Omega \equiv (0, a, -a)$ su γ.

$ds = ae^{\theta}\sqrt{(\cos(\theta)+\sin(\theta))^2 + 1^2 + (\sin(\theta)-\cos(\theta))^2}d\theta =$
$ae^{\theta}\sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)+2\cos(\theta)\sin(\theta)+1+\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)-2\cos(\theta)\sin(\theta)}d\theta = ae^{\theta}\sqrt{1+1+1}d\theta = ae^{\theta}\sqrt{3}d\theta$,
quindi $s = a\sqrt{3}(e^{\theta}-1)$, $e^{\theta} = \dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1$, $\theta = \ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)$. La parametrizzazione di γ in funzione di s è quindi
$OP(s) = \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}}+a\right)\left(\sin\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)\right)\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}-\cos\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)\right)\hat{\mathbf{k}}\right)$, con $s \in (-a\sqrt{3}, +\infty)$.

b) Determinare le componenti del triedro principale $\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}$ rispetto ai versori di $\mathcal{T}$ e il raggio di curvatura di γ in un suo punto generico.

$\mathbf{T} = \dfrac{dx}{d\theta}\hat{\mathbf{i}}+\dfrac{dy}{d\theta}\hat{\mathbf{j}}+\dfrac{dz}{d\theta}\hat{\mathbf{k}} = ae^{\theta}\left((\cos(\theta)+\sin(\theta))\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+(\sin(\theta)-\cos(\theta))\hat{\mathbf{k}}\right)$ con $|\mathbf{T}| = ae^{\theta}\sqrt{3}$; quindi $\hat{\mathbf{t}} = \dfrac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|} =$
$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left((\cos(\theta)+\sin(\theta))\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+(\sin(\theta)-\cos(\theta))\hat{\mathbf{k}}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{i}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}}+\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{k}}\right)$.
$\mathbf{N} = \dfrac{d\hat{\mathbf{t}}}{d\theta} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(-\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{i}}+\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{k}}\right)$ con $|\mathbf{N}| = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$; quindi $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = -\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{i}}+\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{k}}$.
$\dfrac{1}{R_c} = \left|\dfrac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}\right| = \left|\dfrac{d\hat{\mathbf{t}}}{d\theta}\right|\dfrac{d\theta}{ds} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\dfrac{e^{-\theta}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}e^{-\theta}}{3a}$, da cui $R_c = \dfrac{3ae^{\theta}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\left(s+a\sqrt{3}\right)$. Infine si ha
$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}}\wedge\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{i}}-\sqrt{2}\hat{\mathbf{j}}+\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{k}}\right)$.

c) Scrivere l'espressione dell'energia potenziale di P; calcolarne le eventuali posizioni di equilibrio, determinando se sono stabili o no.

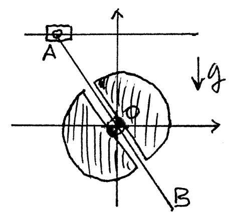
Si ha $U = mgz = -mgae^{\theta}\cos(\theta)$, con $m > 0$, $g > 0$. Le posizioni di equilibrio si hanno per $\dfrac{dU}{d\theta} = 0$, da cui $mgae^{\theta}(\sin(\theta)-\cos(\theta)) = 0$, cioè $\theta = \dfrac{\pi}{4}+k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Per determinare quali sono stabili e quali no, calcoliamo $\dfrac{d^2U}{d\theta^2} = 2mgae^{\theta}\sin(\theta)$. Si ha $\left.\dfrac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi} = mga\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi} > 0$, quindi per $\theta = \dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ (cioè $s = a\sqrt{3}(e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}-1)$) si hanno posizioni di equilibrio stabile. Si ha infine $\left.\dfrac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi} = -mga\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi} < 0$, quindi per $\theta = \dfrac{5\pi}{4}+2k\pi$ (cioè $s = a\sqrt{3}(e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}-1)$) si hanno posizioni di equilibrio instabile.

d) Scrivere l'equazione del moto di P usando l'equazione di Lagrange e ricavare il periodo delle piccole oscillazioni intorno a **tutte** le posizioni di equilibrio stabile.

Si ha $T = \dfrac{1}{2}m\dot{s}^2$, $U = -mg\left(\dfrac{s}{\sqrt{3}}+a\right)\cos\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)\right)$, $\mathcal{L} = T-U = \dfrac{1}{2}m\dot{s}^2+mg\left(\dfrac{s}{\sqrt{3}}+a\right)\cos\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)\right)$;
da $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}}\right)-\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = 0$ si ottiene $m\ddot{s}-\dfrac{mg}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)\right)-\sin\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)\right)\right) = 0$, da cui si ricava
$\ddot{s}+g\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)-\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$. Sviluppando in serie il termine non lineare intorno alle posizioni s_k di equilibrio stabile si ha, posto $\tilde{s} = s-s_k$, $\sin\left(\ln\left(\dfrac{\tilde{s}_k+s_k}{a\sqrt{3}}+1\right)-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\ln\left(\dfrac{\tilde{s}}{a\sqrt{3}}+e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\right)-\dfrac{\pi}{4}\right) =$
$\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{\tilde{s}e^{-\frac{\pi}{4}-2k\pi}}{a\sqrt{3}}\right)+\dfrac{\pi}{4}+2k\pi-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\tilde{s}e^{-\frac{\pi}{4}-2k\pi}}{a\sqrt{3}}+2k\pi+o(\tilde{s})\right) = \dfrac{\tilde{s}e^{-\frac{\pi}{4}-2k\pi}}{a\sqrt{3}}+o(\tilde{s})$. Sostituendo nell'equazione del moto si ha $\ddot{\tilde{s}}+\dfrac{g\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}-2k\pi}}{3a}\tilde{s} = 0$ che è l'equazione di un moto armonico di pulsazione
$\omega_k = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{3}\dfrac{g}{a}}e^{-\frac{\pi}{8}-k\pi}$ e periodo $\tau_k = 2\pi\sqrt{\dfrac{3}{\sqrt{2}}\dfrac{a}{g}}e^{\frac{\pi}{8}+k\pi}$, che dipendono da k.

e) Scrivere le equazioni del moto per P lungo le direzioni del triedro principale e ricavare da esse le componenti della reazione vincolare dinamica supponendo di conoscere $s(t)$.
L'equazione del moto è $m\mathbf{a}=m\mathbf{g}+\boldsymbol{\phi}$. Scomponiamo tale equazione lungo le direzioni della terna intrinseca di γ ponendo $\boldsymbol{\phi}=\phi_n\hat{\mathbf{n}}+\phi_b\hat{\mathbf{b}}$; si ottiene $m\left(\ddot{s}\hat{\mathbf{t}}+\dfrac{\dot{s}^2}{R_c}\hat{\mathbf{n}}\right)=-mg\hat{\mathbf{k}}+\phi_n\hat{\mathbf{n}}+\phi_b\hat{\mathbf{b}}$. Poiché $\hat{\mathbf{k}}=(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{t}})\hat{\mathbf{t}}+(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}+(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{b}})\hat{\mathbf{b}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)-\dfrac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{t}}+\cos\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)-\dfrac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)-\dfrac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{b}}$, si ottiene $m\ddot{s}=-mg\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)-\dfrac{\pi}{4}\right)$, già vista al d), $m\dfrac{\dot{s}^2}{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(s+a\sqrt{3}\right)}=-mg\cos\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)-\dfrac{\pi}{4}\right)+\phi_n$ e $0=-mg\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)-\dfrac{\pi}{4}\right)+\phi_b$. Quindi si ottiene $\phi_n=mg\cos\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{m\sqrt{2}\dot{s}^2}{\sqrt{3}s+3a}$ e $\phi_b=mg\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)-\dfrac{\pi}{4}\right)$. Poiché $E=\dfrac{1}{2}m\dot{s}^2-mg\left(\dfrac{s}{\sqrt{3}}+a\right)\cos\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)\right)=$costante, si ha $\phi_n=mg\left(1+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\cos\left(\ln\left(\dfrac{s}{a\sqrt{3}}+1\right)-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{2\sqrt{2}E}{\sqrt{3}s+3a}$.

2. Un disco omogeneo di raggio r, massa m, ha il proprio centro O incernierato a una cerniera fissa e presenta una scanalatura lungo un diametro entro la quale può scorrere senza attrito una sbarra AB di lunghezza $4r$ e massa m. È presente la gravità. L'estremo A della sbarra è vincolato a una cerniera mobile vincolata a sua volta a muoversi lungo una guida orizzontale fissa posta al di sopra del disco. Quando la sbarra è verticale, O coincide geometricamente col punto medio della sbarra. Tutti i vincoli sono privi di attrito.



a) Dopo aver scelto un opportuno sistema di riferimento "fisso" e un'opportuna coordinata lagrangiana θ per descrivere la configurazione del sistema, ricavare la posizione e la velocità di A in funzione di θ e $\dot{\theta}$, e di un qualunque punto P della sbarra in funzione di $\overline{AP}$, θ e $\dot{\theta}$.
Scegliamo l'asse x passante per O e parallelo alla guida, l'asse y passante per O e perpendicolare alla guida, θ l'angolo che la sbarra forma con il semiasse positivo delle y, misurato dall'asse alla sbarra. Come di consueto, il senso antiorario ha segno positivo e si usano i soliti versori degli assi. La guida dista $2r$ dall'asse orizzontale x, poniamo $OA=x_A\hat{\mathbf{i}}+2r\hat{\mathbf{j}}$. Si ha $-\dfrac{x_A}{2r}=\tan(\theta)$, quindi $OA=2r(-\tan(\theta)\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}})$ e $\mathbf{v}_A=-\dfrac{2r\dot{\theta}}{\cos^2(\theta)}\hat{\mathbf{i}}$. Dalla formula fondamentale della cinematica piana, si ha $\mathbf{v}_P=\mathbf{v}_A+\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}\wedge AP$. Introduciamo un sistema di riferimento solidale alla sbarra con origine in A e avente i versori $\hat{\mathbf{i}}_*$ e $\hat{\mathbf{j}}_*$ coincidenti per $\theta=0$ coi versori $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$. Si ha $\hat{\mathbf{i}}_*=\cos\theta\hat{\mathbf{i}}+\sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}$; $\hat{\mathbf{j}}_*=-\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}}+\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}}$. $AP=-\overline{AP}\hat{\mathbf{j}}_*=\overline{AP}(\sin\theta\hat{\mathbf{i}}-\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}})$.
Quindi $\mathbf{v}_P=\mathbf{v}_A+\overline{AP}\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}\wedge(\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}}-\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}})=-\dfrac{2r\dot{\theta}}{\cos^2(\theta)}\hat{\mathbf{i}}+\overline{AP}\dot{\theta}(\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}}+\sin(\theta)\hat{\mathbf{j}})$

b) Mostrare che per ogni θ compreso in un opportuno intervallo esiste è ed unico un punto Q della sbarra tale che $\mathbf{v}_Q$ è parallelo ad AB; determinare gli estremi di tale intervallo e calcolare il vettore OQ.
La sbarra ha la direzione di $\hat{\mathbf{j}}_*$, quindi bisogna imporre $\mathbf{v}_Q\wedge\hat{\mathbf{j}}_*=0$, da cui si ottiene, sostituendo, $\left(-\dfrac{2r\dot{\theta}}{\cos^2(\theta)}\hat{\mathbf{i}}+\overline{AQ}\dot{\theta}(\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}}+\sin(\theta)\hat{\mathbf{j}})\right)\wedge(-\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}}+\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}})=\mathbf{0}$, da cui $\left(-\dfrac{2r\dot{\theta}}{\cos(\theta)}+\overline{AQ}\dot{\theta}(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))\right)\hat{\mathbf{k}}=\mathbf{0}$ ed infine $\overline{AQ}=\dfrac{2r}{\cos(\theta)}$. Poiché $0\leq\overline{AQ}\leq 4r$, si ha $0\leq\dfrac{2}{\cos\theta}\leq 4$, da cui $\cos(\theta)\geq\dfrac{1}{2}$ ed infine $-\dfrac{\pi}{3}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{3}$.
Si osservi che Q è il punto della sbarra che coincide geometricamente col punto O del disco ad ogni posizione della sbarra indicata da θ, infatti $OQ=OA+AQ=2r(-\tan(\theta)\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}})-\dfrac{2r}{\cos(\theta)}(-\sin\theta\hat{\mathbf{i}}+\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}})=(-2r\tan(\theta)+2r\tan(\theta))\hat{\mathbf{i}}+(2r-2r)\hat{\mathbf{j}}=\mathbf{0}$.

c) Calcolare la velocità $\mathbf{v}^{(r)}$ di strisciamento dei punti della sbarra a contatto con il disco in funzione di θ e delle sue derivate.
Basta proiettare la velocità di un punto P della sbarra lungo la direzione di $\hat{\mathbf{j}}_*$, si ha cioè $\mathbf{v}^{(r)}=((\mathbf{v}_A-\overline{AP}\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}\wedge\hat{\mathbf{j}}_*)\cdot\hat{\mathbf{j}}_*)\hat{\mathbf{j}}_*=(\mathbf{v}_A\cdot\hat{\mathbf{j}}_*)\hat{\mathbf{j}}_*=-\dfrac{2r\dot{\theta}}{\cos^2(\theta)}\hat{\mathbf{i}}\cdot(-\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}}+\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}})\hat{\mathbf{j}}_*=\dfrac{2r\sin(\theta)\dot{\theta}}{\cos^2(\theta)}\hat{\mathbf{j}}_*=\dfrac{2r\sin(\theta)\dot{\theta}}{\cos^2(\theta)}(-\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}}+\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}})$.
Ovviamente il risultato non dipende dalla scelta di P.

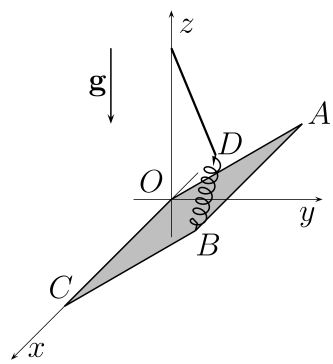
d) Ricavare la posizione del centro istantaneo di rotazione e le equazioni parametriche e cartesiane della polare fissa e della polare mobile.

La velocità di A è diretta come $\hat{\mathbf{i}}$, la velocità del punto Q della sbarra sovrapposto a O quando essa si trova nella posizione indicata da θ è diretta lungo $\hat{\mathbf{j}}_*$. Quindi le coordinate del CIR in funzione di θ si ottengono intersecando due rette: una passante per A e diretta lungo $\hat{\mathbf{j}}$ e l'altra passante per O e diretta lungo $\hat{\mathbf{i}}_*$, cioè $\begin{cases} x = -2r\tan(\theta) \\ y = \tan(\theta)x \end{cases}$, da cui $\begin{cases} x_{\text{CIR}} = -2r\tan(\theta) \\ y_{\text{CIR}} = -2r\tan^2(\theta) \end{cases}$ o, più semplicemente, $\begin{cases} x_{\text{CIR}} = rs \\ y_{\text{CIR}} = -\dfrac{rs^2}{2} \end{cases}$. Essa è la parabola di equazione $y = -\dfrac{x^2}{2r}$. Per ottenere la polare mobile, basta trasformare le coordinate di un generico punto $P \equiv (x_P, y_P)$ nel sistema "fisso" in modo da ottenere le coordinate dello stesso punto P nel sistema solidale avente origine in A. Ponendo $OP = OA + AP$, si ha $x_P\hat{\mathbf{i}} + y_P\hat{\mathbf{j}} = -2r\tan(\theta)\hat{\mathbf{i}} + 2r\hat{\mathbf{j}} + x_{P*}\hat{\mathbf{i}}_* + y_{P*}\hat{\mathbf{j}}_*$ da cui $\begin{cases} x_P = -2r\tan(\theta) + x_{P*}\cos(\theta) - y_{P*}\sin(\theta) \\ y_P = 2r + x_{P*}\sin(\theta) + y_{P*}\cos(\theta) \end{cases}$ ed infine $\begin{cases} x_{P*} = x_P\cos(\theta) + y_P\sin(\theta) \\ y_{P*} = -x_P\sin(\theta) + y_P\cos(\theta) - \dfrac{2r}{\cos(\theta)} \end{cases}$. Le equazioni parametriche della polare mobile sono quindi $\begin{cases} x_{\text{CIR}*} = -2r\tan(\theta)\cos(\theta) - 2r\tan^2(\theta)\sin(\theta) \\ y_{\text{CIR}*} = 2r\tan(\theta)\sin(\theta) - 2r\tan^2(\theta)\cos(\theta) - \dfrac{2r}{\cos(\theta)} \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x_{\text{CIR}*} = -2r\dfrac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \\ y_{\text{CIR}*} = -\dfrac{2r}{\cos(\theta)} \end{cases}$. Ricavando $\cos\theta = -\dfrac{2r}{y_*}$ e $\sin(\theta) = -\dfrac{2rx_*}{y_*^2}$ e ricordando che $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, si ottiene $4r^2(x_*^2 + y_*^2) = y_*^4$.

e) Calcolare la posizione del baricentro del sistema in funzione di θ e il momento angolare del sistema rispetto a O in funzione di θ e delle sue derivate.

Il baricentro del disco coincide con O, il baricentro G_s della sbarra è nel punto medio della sbarra, quindi $OG_\text{s} = \overline{OG_\text{s}}\hat{\mathbf{j}}_* = \left(\dfrac{2r}{\cos(\theta)} - 2r\right)(\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}} - \sin(\theta)\hat{\mathbf{i}}) = 2r(1-\cos(\theta))(-\tan(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$. Il baricentro del sistema è $OG = \dfrac{mOO + mOG_\text{s}}{2m} = r(1-\cos(\theta))(-\tan(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$. Per il calcolo del momento angolare, osserviamo che possiamo calcolare separatamente il momento angolare del disco $\mathbf{K}_O^\text{d}$ e della sbarra $\mathbf{K}_O^\text{s}$ e sommare i due contributi per avere il momento angolare del sistema $\mathbf{K}_O = \mathbf{K}_O^\text{d} + \mathbf{K}_O^\text{s}$. Si ha $\mathbf{K}_O^\text{d} = \dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$. Per la sbarra, si osservi che la velocità $\mathbf{v}_P$ di un suo punto P può essere scritta nella forma $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}^{(\text{r})} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \wedge OP$, e che nel calcolo di $OP \wedge \mathbf{v}_P$ il contributo di $\mathbf{v}^{(\text{r})}$ è nullo, perché $\mathbf{v}^{(\text{r})}$ è parallela ad AP. Quindi $\mathbf{K}_O^\text{s} = I_{\hat{\mathbf{k}},O}\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} = \left(\dfrac{m(4r)^2}{12} + mOG_\text{s}^2\right)\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$. Si ha $OG_\text{s}^2 = 4r^2\left(\dfrac{1}{\cos(\theta)} - 1\right)^2$. Svolgendo il quadrato e sostituendo si ha $\mathbf{K}_O = \dfrac{4}{3}\left(2 - \dfrac{1}{\cos(\theta)}\right)^2 mr^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$.

3. Una lamina quadrata omogenea $OABC$ di lato l e massa m è incernierata nei suoi punti O e C in modo da poter ruotare (senza poter traslare) intorno all'asse orizzontale x. È presente la gravità $\mathbf{g}$, diretta come l'asse z e orientata nel verso negativo. Una molla di costante elastica $k = \dfrac{m|\mathbf{g}|}{4l}$ e di lunghezza a riposo nulla ha un suo estremo bloccato nel punto $D \equiv (l, l, l)$, l'altro estremo è attaccato al punto B.



a) Dopo aver scelto un'opportuna coordinata lagrangiana, determinare gli spostamenti virtuali dei punti di applicazione delle forze attive esterne e i lavori virtuali di tali forze. Calcolare infine le posizioni di equilibrio della lamina utilizzando il principio dei lavori virtuali.

Si prenda come coordinata lagrangiana l'angolo θ che la semiretta con origine in O e passante per A forma col semiasse positivo delle y, con $\theta \in (-\pi, \pi]$. Con tale scelta, e con la scelta di considerare positivo il senso antiorario, si ha $OB = l(\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{j}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{k}})$, da cui $\delta B = l(-\sin(\theta)\hat{\mathbf{j}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{k}})\delta\theta$; si ha poi $OG = \frac{l}{2}(\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{j}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{k}})$, da cui $\delta G = \frac{l}{2}(-\sin(\theta)\hat{\mathbf{j}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{k}})\delta\theta$. Le forze attive esterne agenti sono il peso $\mathbf{P} = -mg\hat{\mathbf{k}}$ e la forza elastica $\mathbf{F} = -kDB = kBD = k(OD - OB) = \dfrac{mg}{4l}l(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{i}} - \cos(\theta)\hat{\mathbf{j}} - \sin(\theta)\hat{\mathbf{k}}) = \dfrac{mg}{4}((1-\cos(\theta))\hat{\mathbf{j}} +$

$(1-\sin(\theta))\hat{\mathbf{k}})$. Il lavoro virtuale delle forze attive esterne sarà $\delta L^{(\mathrm{a,e})}=\mathbf{P}\boldsymbol{.}\delta G+\mathbf{F}\boldsymbol{.}\delta B=-\frac{mgl}{2}\cos(\theta)\delta\theta$ $\frac{mgl}{4}(-(1-\cos(\theta))\sin(\theta)+(1-\sin(\theta))\cos(\theta))\delta\theta$. Deve essere $\delta L^{(\mathrm{a,e})}=0$ per ogni spostamento virtuale compatibile coi vincoli, da cui $\left(-\frac{mgl}{2}\cos(\theta)+\frac{mgl}{4}(-\sin(\theta)+\cos(\theta))\right)\delta\theta=0\ \forall\delta\theta$, ed infine $-\frac{mgl}{4}(\sin(\theta)+\cos(\theta))=0$, da cui si ottengono le due posizioni di equilibrio $\theta_1=-\frac{\pi}{4}$ e $\theta_2=\frac{3\pi}{4}$.

b) Scrivere le equazioni cardinali della statica, e ricavare le reazioni vincolari in O e C nelle posizioni di equilibrio trovate al punto a). (Ipotizziamo che le coppie rotoidali non esercitino forze dirette lungo il proprio asse di rotazione).
Le reazioni vincolari possono essere scritte nella forma $\boldsymbol{\phi}_O=\phi_{Oy}\hat{\mathbf{j}}+\phi_{Oz}\hat{\mathbf{k}}$ e $\boldsymbol{\phi}_C=\phi_{Cy}\hat{\mathbf{j}}+\phi_{Cz}\hat{\mathbf{k}}$. Si hanno quindi 4 incognite. Scegliendo il punto O come polo, si hanno le equazioni $\begin{cases}\mathbf{P}+\mathbf{F}+\boldsymbol{\phi}_O+\boldsymbol{\phi}_A=\mathbf{0}\\ \mathbf{M}_O^{\mathbf{P}}+\mathbf{M}_O^{\mathbf{F}}+\mathbf{M}_O^{\boldsymbol{\phi}_A}=\mathbf{0}\end{cases}$. Si ha $\mathbf{M}_O^{\mathbf{P}}=OG\wedge\mathbf{P}=\frac{l}{2}(\hat{\mathbf{i}}+\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}}+\sin(\theta)\hat{\mathbf{k}})\wedge(-mg)\hat{\mathbf{k}}=\frac{mgl}{2}(-\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}})$; $\mathbf{M}_O^{\mathbf{F}}=OB\wedge\mathbf{F}=l(\hat{\mathbf{i}}+\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}}+\sin(\theta)\hat{\mathbf{k}})\wedge$ $\frac{mg}{4}((1-\cos(\theta))\hat{\mathbf{j}}+(1-\sin(\theta))\hat{\mathbf{k}})=\frac{mgl}{4}((1-\cos(\theta))\hat{\mathbf{k}}-(1-\sin(\theta))\hat{\mathbf{j}}+\cos(\theta)(1-\sin(\theta))\hat{\mathbf{i}}-\sin(\theta)(1-\cos(\theta))\hat{\mathbf{i}})=$ $\frac{mgl}{4}((\cos(\theta)-\sin(\theta))\hat{\mathbf{i}}-(1-\sin(\theta))\hat{\mathbf{j}}+(1-\cos(\theta))\hat{\mathbf{k}})$. $\mathbf{M}_O^{\boldsymbol{\phi}_C}=OC\wedge\boldsymbol{\phi}_C=l\hat{\mathbf{i}}\wedge\phi_{Cy}\hat{\mathbf{j}}+\phi_{Cz}\hat{\mathbf{k}}=l\phi_{Cy}\hat{\mathbf{k}}-l\phi_{Cz}\hat{\mathbf{j}}$. Prendendo le componenti lungo le direzioni degli assi si ha $\begin{cases}\frac{mg}{4}(1-\cos(\theta))+\phi_{Oy}+\phi_{Cy}=0\\ -mg+\frac{mg}{4}(1-\sin(\theta))+\phi_{Oz}+\phi_{Cz}=0\\ -\frac{mgl}{2}\cos(\theta)+\frac{mgl}{4}(\cos(\theta)-\sin(\theta))=0\\ \frac{mgl}{2}-\frac{mgl}{4}(1-\sin(\theta))-l\phi_{Cz}=0\\ \frac{mgl}{4}(1-\cos(\theta))+l\phi_{Cy}=0\end{cases}$, da cui $\begin{cases}\phi_{Oy}+\phi_{Cy}=\frac{mg}{4}(\cos(\theta)-1)\\ \phi_{Oz}+\phi_{Cz}=\frac{mg}{4}(3+\sin(\theta))\\ -\frac{mgl}{4}(\cos(\theta)+\sin(\theta))=0\\ \phi_{Cz}=\frac{mg}{4}(1+\sin(\theta))\\ \phi_{Cy}=\frac{mg}{4}(\cos(\theta)-1)\end{cases}$. La terza equazione è già nota dal punto a), dalle prime due si ha $\phi_{Oy}=\frac{mg}{4}(\cos(\theta)-1)-\phi_{Cy}=0$, $\phi_{Oz}=\frac{mg}{4}(3+\sin(\theta))-\phi_{Cz}=\frac{mg}{2}$. Le relazioni ottenute sono valide solo se θ è un angolo corrispondente a una posizione di equilibrio. Quindi $\boldsymbol{\phi}_{O1}=\frac{mg}{2}\hat{\mathbf{k}}$ e $\boldsymbol{\phi}_{A1}=\frac{mg}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\hat{\mathbf{j}}+\frac{mg}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{k}}$. $\boldsymbol{\phi}_{O2}=\frac{mg}{2}\hat{\mathbf{k}}$ e $\boldsymbol{\phi}_{A2}=-\frac{mg}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)\hat{\mathbf{j}}+\frac{mg}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{k}}$.

c) Scrivere l'energia meccanica della lamina, e ricavare l'equazione del moto usando un opportuno principio di conservazione.
L'asse di rotazione della lamina è fisso, quindi $T=\frac{1}{2}I_{\hat{\mathrm{i}},O}\dot{\theta}^2=\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$. $U=\frac{k\overline{BD}^2}{2}+mgz_G=\frac{mgl}{8}((1-\cos(\theta))^2+(1-\sin(\theta))^2)+\frac{mgl}{2}\sin(\theta)=\frac{mgl}{4}(-\cos(\theta)-\sin(\theta))+\frac{mgl}{2}\sin(\theta)+C=\frac{mgl}{4}(\sin(\theta)-\cos(\theta))+C$.
Quindi $E=T+U=\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{mgl}{4}(\sin(\theta)-\cos(\theta))$. Poiche le forze agenti sulla lamina sono conservative oppure non compiono lavoro, $E=$ costante, cioè $\dot{E}=0$. Quindi $\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+\frac{mgl}{4}(\cos(\theta)+\sin(\theta))\dot{\theta}=0$, da cui $\ddot{\theta}+\frac{3\sqrt{2}g}{4l}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0$.