Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

2 luglio 2015 - secondo appello - gruppo A, prima parte (un'ora)

N. MATR./ANNO ISCR.		COGNOME	
DOCENTE/ CREDITI		NOME	

Istruzioni al fine della valutazione:
- *compilate l'intestazione in stampatello.* Ai quesiti contrassegnati con [12] deve rispondere chi deve farsi riconoscere 12 crediti.
- scrivete *solo le risposte* su questo foglio, *l'unico* da restituire;
- *ricopiate a parte* le vostre risposte per confrontarle con quelle ufficiali.

Esercizio 1 Si calcoli l'area bidimensionale A del parallelogrammo di $\mathbb{R}^6$ avente come vertici $(0,0,0,0,0,0)$, $(1,1,1,1,1,1)$, $(1,0,1,0,1,0)$, e le loro somme. **A =**

Esercizio 2 Calcolare, se esiste, $L = \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{n}{nx+x^2}\,dx$. **L =**

Esercizio 3 Posto $f(x,y,z) = x^4 + y^3$, determinare i punti di massimo e minimo assoluto di f nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} = 1\}$, specificando quali di essi siano punti critici tangenziali (cioè stazionari vincolati).
Punti di minimo: **di massimo:** **critici tang.:**

Esercizio 4 Sia $F(u,v) = (u-v, uv, u+v)$. Si determini l'equazione del piano tangente all'immagine di F nel punto $F(1,1) = (0,1,2)$. **Equazione:**

Esercizio 5 Sia $\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} e^x + y \\ xy \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Detta $\Psi(u,v) := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ l'inversa locale della restrizione di Φ ad un intorno del punto $(1,1)$, si calcoli $\frac{\partial y}{\partial u}(e+1,1)$. $\mathbf{\frac{\partial y}{\partial u}(e+1,1) =}$

Esercizio 6 Si calcoli l'integrale $I = \int_{[0,1]^2} f(x,y)\,dxdy$, ove

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{1}{2}], \\ 2 & \text{se } (x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2},1], \\ -1 & \text{se } (x,y) \in [\frac{1}{2},1] \times [0,\frac{1}{2}], \\ 0 & \text{se } (x,y) \in [\frac{1}{2},1] \times [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

I =

Esercizio 7 Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x^2 + 4y^2 \leq 1\}$, e sia n il versore normale esterno ad E. Posto $G(x,y) = (x,y)$, si calcoli l'integrale curvilineo $I = \int_{\partial E} \langle G, n\rangle\,ds$. **I =**

Esercizio 8 Calcolare il flusso Φ del campo vettoriale $G(x,y,z) = \operatorname{rot}(x^2,y^2,z^2)$ attraverso la superficie S definita dall'equazione $z = \cos\sqrt{x^2+y^2}$, con $x^2+y^2 \leq \pi^2$, ed orientata in modo che $n = (0,0,1)$ sia il vettore normale a S nel punto $P = (0,0,1)$. **Φ =**

---

[12] Esercizio 9 Scrivere i coefficienti di Fourier della funzione

$f(x) = x + \sin 3x, \ x \in [-\pi,\pi].$ $\mathbf{a}_n =$ $\mathbf{b}_n =$

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale
Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli
2 luglio 2015 - secondo appello - prima parte (un'ora)
Studenti ex Galatolo-Georgiev.

N. MATR./ANNO ISCR.		COGNOME	
DOCENTE/ CREDITI		NOME	

Istruzioni al fine della valutazione:
- *compilate l'intestazione in stampatello*;
Ai quesiti contrassegnati con [12] deve rispondere chi deve farsi riconoscere 12 crediti.
- scrivete *solo le risposte* su questo foglio, *l'unico* da restituire;
- *ricopiate a parte* le vostre risposte per confrontarle con quelle ufficiali.

Esercizio 1 Sia $f_n(x) = \frac{n}{nx+x^2}$, $x > 0$.
(a) Calcolare il limite puntuale $f(x)$ della successione $\{f_n\}$. **(a)** $\mathbf{f(x)} =$
(b) Per quali $a > 0$ si ha convergenza uniforme in $[a, \infty[$? **(b)** $\mathbf{a} \in$

Esercizio 2 Nel caso la funzione $f(x, y) = e^{x+y} + \sqrt{1 - \cos xy}$ sia differenziabile nel punto $(0, 0)$, se ne calcoli il gradiente in tale punto. $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) =$

Esercizio 3 Sia $f(x, y) = \cos(x + y) - \tan(x + y) \sin xy$.
Calcolare un versore normale $\mathbf{v}$ al grafico di f nel punto $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 1)$. $\mathbf{v} =$

Esercizio 4 Sia $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} e^x + y \\ xy \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Detta $\Psi(u, v) := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ l'inversa locale della restrizione di Φ ad un intorno del punto $(0, 1)$, si calcoli $\frac{\partial y}{\partial u}(2, 0)$. $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{2}, \mathbf{0}) =$

Esercizio 5 Si determinino le soluzioni costanti e di equilibrio stabile (punti fissi stabili) per $x \to +\infty$ dell'equazione differenziale $y' = xy(y^2 - 1)$. $\mathbf{y} =$

Esercizio 6 Calcolare l'integrale $I = \int_A (1 - y^2) \frac{y}{x} \, dxdy$, ove l'insieme A è definito dalle relazioni $0 \leq x \leq y \leq 2x$, $1 \leq xy \leq 2$. $\mathbf{I} =$

Esercizio 7 Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x^2 + 4y^2 \leq 1\}$, e sia n il versore normale esterno ad E. Posto $G(x, y) = (x, -y)$, si calcoli l'integrale curvilineo $I = \int_{\partial E} \langle G, n \rangle \, ds$. $\mathbf{I} =$

Esercizio 8 Calcolare il flusso Φ del campo $F(x, y, z) = (x, 1 - y, |z|)$ uscente dalla superficie laterale del doppio cono retto con base circolare di raggio unitario nel piano $z = 0$ e vertici $(3, -2, 1)$, $(3, -2, -1)$. $\mathbf{\Phi} =$

---

[12] Esercizio 9 Si scrivano i coefficienti di Fourier della funzione

$f(x) = x + \sin x, \ x \in [-\pi, \pi]$. $\mathbf{a}_n =$ $\mathbf{b}_n =$

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

2 luglio 2015 - secondo appello - gruppo A, seconda parte (due ore)

N. MATR./ANNO ISCR.		COGNOME	
DOCENTE/ CREDITI		NOME	

Istruzioni al fine della valutazione: *compilare l'intestazione in stampatello.*
Si risolva almeno un esercizio, in tutti i punti, *riportando con ordine* lo svolgimento della soluzione e *motivandolo accuratamente.*

Esercizio 1 (a) Fissato $p > 0$, si calcolino il valore minimo e il valore massimo della funzione $f(x, y) = |x|^p + |y|^p$ sul vincolo determinato dall'equazione $x^2 + y^2 = 1$.
(b) Stabilire se la funzione $\frac{1}{x^2+y^2}$ è sommabile sull'insieme E delimitato dalle due spirali

$$S_1 = \left\{(x, y) = \frac{1}{t}(\cos t, \sin t),\ t \geq \pi\right\}, \qquad S_2 = \left\{(x, y) = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)(\cos t, \sin t),\ t \geq \pi\right\}.$$

(c) Stabilire per quali $p > 2$ e $\gamma > 1$ la funzione $\frac{1}{|x|^p+|y|^p}$ è sommabile sull'insieme F delimitato dalle due spirali

$$S_1 = \left\{(x, y) = \frac{1}{t}(\cos t, \sin t),\ t \geq \pi\right\}, \qquad S_3 = \left\{(x, y) = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{t^\gamma}\right)(\cos t, \sin t),\ t \geq \pi\right\}.$$

Esercizio 2 (a) Sia $S = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^3 e^{-xy} = 8,\ z \geq 0\}$. Si mostri che S è una 2-varietà con bordo e se ne determini il bordo bS.
(b) Si calcoli la divergenza del campo vettoriale $F(x, y, z) = e^z(-xy^2, -x^2y, x^2 + y^2)$.
(c) Si orienti S in modo che nel suo punto $(0, 0, 2)$ il versore normale sia $(0, 0, 1)$, e si calcoli il flusso del campo F attraverso la superficie S così orientata.
(d) Si dimostri, usando la teoria nota, che l'intersezione Γ tra S e il cilindro $C = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 = 2,\ z \in \mathbb{R}\}$ è sostegno di una curva regolare. Si calcoli il lavoro di $e^{-z}F$ lungo la curva Γ, orientata coerentemente con l'orientazione della porzione di S che si proietta sulla base $\{(x, y, 0) :\ x^2 + y^2 = 2\}$ del cilindro.

Risoluzione - prima parte A. A. 2014-15

Esercizio 1 Per la formula di Cauchy-Binet si ha

$$A^2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 9.$$

Quindi $A = 3$.

Esercizio 2 La successione di funzioni $f_n(x) = \frac{n}{nx+x^2}$, $x > 0$, ha limite puntuale per $n \to \infty$: infatti

$$f_n(x) = \frac{1}{x + \frac{x^2}{n}} \to \frac{1}{x} \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Inoltre le funzioni $f_n(x)$ sono positive sul dominio di integrazione $[1, \infty[$, e risulta

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x + \frac{x^2}{n+1}} > \frac{1}{x + \frac{x^2}{n}} = f_n(x) \qquad \forall x \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di convergenza monotona (B. Levi). Pertanto

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{n}{nx + x^2}\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = +\infty.$$

Esercizio 3 **Prima soluzione (diretta)**: le condizioni del vincolo comportano $|x|, |y| \leq 1$. Pertanto

$$\begin{cases} f(x, y) = x^4 + y^3 \geq y^3 \geq -1, \\ f(x, y) = x^4 + y^3 \leq 1 + y^3 \leq 2. \end{cases}$$

Dato che $|x|, |y| \leq 1$, affinché sia $f(x, y) = 2$ deve essere $x^4 = 1$ e $y^3 = 1$, cioè $x = \pm 1$ e $y = 1$: i punti di massimo sono quindi esattamente $(1, 1), (-1, 1)$.
Analogamente, affinché sia $f(x, y) = -1$ deve essere $x^4 = 0$ e $y^3 = -1$, cioè $x = 0$ e $y = -1$: l'unico punto di minimo è $(0, -1)$. Infine $(1, 1), (-1, 1)$ sono i vertici del vincolo E e ivi non vi è retta tangente, mentre $(0, -1)$ è interno al lato inferiore, ed essendo la funzione f regolare, necessariamente il suo gradiente dovrà in tale punto essere ortogonale al vincolo. Quindi $(0, -1)$ è un punto stazionario vincolato, ossia critico tangenziale.
Seconda soluzione (indiretta): i punti di massimo e minimo assoluti vanno ricercati, per confronto tra i valori assunti dalla funzione, tra i punti ove la funzione o il vincolo non sono regolari e tra i punti critici tangenziali, ossia quei punti in cui il gradiente della funzione non ha componente tangenziale al vincolo, vale a dire è parallelo al gradiente non nullo della funzione che definisce il vincolo (è la condizione espressa dai moltiplicatori di Lagrange).
Il vincolo è il quadrato $[-1; 1] \times [-1; 1]$ e i vertici $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ sono punti non regolari: in questi punti si ha $f(1, 1) = f(-1, 1) = 2$, $f(-1, -1) = f(1, -1) = 0$.
I lati del vincolo sono identificati da $x = 1$ e $-1 < y < 1$, $x = -1$ e $-1 < y < 1$, $y = 1$ e $-1 < x < 1$, ed infine $y = -1$ e $-1 < x < 1$; i gradienti delle funzioni che definiscono questi

vincoli sono rispettivamente

$$\begin{cases} (1,0) & \text{in } x=1,\ -1<y<1, \\ (-1,0) & \text{in } x=-1,\ -1<y<1, \\ (0,1) & \text{in } y=1,\ -1<x<1, \\ (0,-1) & \text{in } y=-1,\ -1<x<1, \end{cases}$$

quindi sono non nulli.
Il gradiente di f su questi lati è

$$\nabla f(x,y) = (4x^3, 3y^2) = \begin{cases} (4, 3y^2) & \text{in } x=1,\ -1<y<1, \\ (-4, 3y^2) & \text{in } x=-1,\ -1<y<1, \\ (4x^3, 3) & \text{in } y=\pm 1,\ -1<x<1. \end{cases}$$

Pertanto i punti critici tangenziali sono uno per lato: $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, e si ha rispettivamente $f(1,0)=1$, $f(0,1)=1$, $f(-1,0)=1$, $f(0,-1)=-1$.
Tuttavia a noi interessano solamente i punti di massimo e di minimo; confrontando i valori trovati, otteniamo: un punto di minimo $(0,-1)$, che è punto critico tangenziale, e due punti di massimo $(1,1)$ e $(-1,1)$, che sono due vertici.

Esercizio 4 Nelle ipotesi del teorema del rango, l'equazione del piano tangente all'immagine di F è, in forma parametrica,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F(1,1) + s\,\frac{\partial F}{\partial u}(1,1) + t\,\frac{\partial F}{\partial v}(1,1), \qquad s,t \in \mathbb{R},$$

ossia, essendo $F_u(u,v) = (1, v, 1)$ e $F_v(u,v) = (-1, u, 1)$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-t \\ 1+s+t \\ 2+s+t \end{pmatrix}, \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

In coordinate cartesiane, il piano si descrive semplicemente, per sottrazione, come $z-y=1$. Del resto i vettori (x,y,y), che generano il piano passante per l'origine parallelo a quello trovato, sono esattamente quelli ortogonali al vettore

$$F_u(1,1) \times F_v(1,1) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

che è perpendicolare all'immagine di F in $(1,1)$. Oppure, direttamente, il piano in forma cartesiana è l'insieme degli (x,y,z) per cui:

$$\left\langle (x,y,z) - F(1,1), \frac{\partial F}{\partial u}(1,1) \times \frac{\partial F}{\partial v}(1,1) \right\rangle =$$

$$= \langle (x,y,z) - (0,1,2), (1,1,1) \times (-1,1,1) \rangle = \det \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2z - 2y - 2 = 0.$$

Si noti che, in effetti, siamo nelle ipotesi del teorema del rango, perché F ha in ogni punto differenziale di rango 2: infatti

$$DF(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$JF(u,v) = \det \begin{pmatrix} 1 & v & 1 \\ -1 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2+v^2 & uv \\ uv & 2+u^2 \end{pmatrix} = 4+2(u^2+v^2) > 4 > 0.$$

Si può vedere che il piano tangente trovato è il piano tangente a tutta l'immagine di F, e non solo ad una sua restrizione ad un intorno di $(1,1)$. A questo scopo notiamo che la funzione F è invertibile da $\mathbb{R}^2$ alla sua immagine $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 = z^2 - 4y\}$: infatti $2u = z + x$, $2v = z - x$. L'inversa è continua come funzione da Z, con la distanza indotta su Z da quella di $\mathbb{R}^3$, in $\mathbb{R}^2$. Pertanto, il piano tangente in $F(1,1)$ a $Z = F(\mathbb{R}^2)$ esiste (unico) e coincide con quello fornito dal teorema del rango come piano tangente in $F(1,1)$ all'immagine della restrizione di F ad un intorno di $(1,1)$.

Esercizio 5 Basta verificare le ipotesi del teorema di invertibilità locale. L'applicazione Φ è di classe C^1 con

$$D\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 1 \\ y & x \end{pmatrix},$$

quindi

$$D\Phi(1,1) = \begin{pmatrix} e & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante uguale a $e-1$ e dunque è invertibile. Perciò l'inversa Φ^{-1} esiste in un intorno di $\Phi(1,1) = (e+1,1)$ e si ha $D[\Phi^{-1}](e+1,1) = [D\Phi(1,1)]^{-1}$. Nel nostro caso, derivando rispetto ad u l'identità

$$\begin{cases} e^x + y = u \\ xy = v, \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot e^x + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot 1 = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial u} \cdot y + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot x = 0, \end{cases}$$

e quindi, calcolando nel punto $(e+1,1)$, si risolve il sistema lineare

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}(e+1,1)\, e + \frac{\partial y}{\partial u}(e+1,1) = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial u}(e+1,1) + \frac{\partial y}{\partial u}(e+1,1) = 0, \end{cases}$$

ottenendo

$$\frac{\partial y}{\partial u}(e+1,1) = \frac{1}{1-e}\,.$$

Esercizio 6 Poiché f è costante su ciascuno dei quattro quadrati, che hanno tutti lato di lunghezza $\frac{1}{2}$, l'integrale è dato dalla somma dei prodotti tra l'area di ogni quadrato e il valore assunto dalla funzione su di esso: pertanto

$$I = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 7 Per il teorema della divergenza,

$$I = \int_{\partial E} \langle G, n \rangle \, ds = \int_E \operatorname{div} G(x,y)\, dxdy = \int_E 2\, dxdy = 2m_2(E);$$

ma l'ellisse E, che ha semiassi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{2}$, ha area uguale a $\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$. Quindi

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 8 La superficie S è orientata, limitata, con bordo la circonferenza $x^2 + y^2 = \pi^2$ del piano $z = -1$. Per il teorema di Stokes, detto τ il versore che orienta il bordo della superficie bS in modo coerente rispetto all'orientazione di S, si ha

$$\Phi = \int_S G \times n \, d\sigma = \int_{bS} \langle (x^2, y^2, z^2), \tau \rangle \, ds.$$

Nel nostro caso, il versore n normale a S ha terza componente positiva, quindi l'orientazione di τ lungo bS è quella antioraria, data dal vettore $\tau = (0, 1, 0)$ nel punto $P = (\pi, 0, -1) \in bS$: perciò bS ha la parametrizzazione

$$x = \pi \cos t, \quad y = \pi \sin t, \quad z = -1.$$

Pertanto

$$\Phi = \int_0^{2\pi} [-\pi^3 (\cos t)^2 \sin t + \pi^3 (\sin t)^2 \cos t] \, dt = 0.$$

Esercizio 9 Poiché la funzione f è dispari, si ha $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo che i coefficienti di Fourier della somma di più funzioni sono le somme degli omologhi coefficienti di Fourier delle funzioni addendo; inoltre, i coefficienti di Fourier di $\sin 3x$ sono tutti nulli, ad eccezione di $b_3 = 1$. Quindi si ha per $n \neq 3$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{n\pi} \left[- [x \cos nx]_{-\pi}^{\pi} \right] + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \\ &= \frac{1}{n\pi} [-\pi \cos n\pi + (-\pi) \cos n(-\pi)] + \frac{1}{n^2 \pi} [\sin nx]_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{n\pi} [-\pi(-1)^n - \pi(-1)^n] + 0 = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

mentre $b_3 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$.

Risoluzione - prima parte Galatolo-Georgiev

Esercizio 1 (a) La successione di funzioni $f_n(x) = \frac{n}{nx+x^2}$, $x > 0$, ha limite puntuale per $n \to \infty$: infatti

$$f_n(x) = \frac{1}{x + \frac{x^2}{n}} \to \frac{1}{x} \qquad \text{per } n \to \infty.$$

(b) Dato $a > 0$, bisogna vedere quando risulta

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq a} \left| \frac{n}{nx + x^2} - \frac{1}{x} \right| = 0.$$

Ora

$$\sup_{x\geq a} \left| \frac{n}{nx + x^2} - \frac{1}{x} \right| = \sup_{x\geq a} \frac{x}{nx + x^2} = \sup_{x\geq a} \frac{1}{n + x} \leq \frac{1}{n + a} \to 0 \text{ per } n \to \infty.$$

Quindi c'è convergenza uniforme in $[a, \infty[$ per ogni $a > 0$.

Esercizio 2 Poiché $f(0, 0) = 0$ e

$$\sqrt{1 - \cos xy} = \sqrt{\frac{x^2y^2}{2} + O(x^4y^4)} = O(x^2 + y^2) = o(\sqrt{x^2 + y^2}) \text{ per } (x, y) \to (0, 0),$$

si ha

$$f(x, y) - f(0, 0) = x + y + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

e quindi, per definizione di differenziale, la funzione è differenziabile in $(0, 0)$, con $\nabla f(0, 0) = (1, 1)$.

Esercizio 3 Il grafico di f è l'immagine della funzione

$$G(x, y) = (x, y, \cos(x + y) - \tan(x + y) \sin xy).$$

Un vettore normale n nel punto $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 1)$ è

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}) \times \frac{\partial G}{\partial y}(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}).$$

Essendo

$$G_x(x, y) = (1, 0, -\sin(x + y) - (1 + \tan^2(x + y)) \sin xy - y \tan(x + y) \cos xy),$$
$$G_y(x, y) = (0, 1, -\sin(x + y) - (1 + \tan^2(x + y)) \sin xy - x \tan(x + y) \cos xy),$$

si ha

$$G_x(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}) = (1, 0, 0), \qquad G_y(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}) = (0, 1, 0),$$

e dunque

$$n = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1).$$

Esercizio 4 Basta verificare le ipotesi del teorema di invertibilità locale. L'applicazione Φ è di classe C^1 con

$$D\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} e^x & 1 \\ y & x \end{pmatrix},$$

quindi

$$D\Phi(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante uguale a -1 e dunque è invertibile. Perciò l'inversa Φ^{-1} esiste in un intorno di $\Phi(0,1) = (2,0)$ e si ha $D[\Phi^{-1}](2,0) = [D\Phi(0,1)]^{-1}$. Nel nostro caso, derivando rispetto ad u l'identità

$$\begin{cases} e^x + y = u \\ xy = v, \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot e^x + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot 1 = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial u} \cdot y + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot x = 0, \end{cases}$$

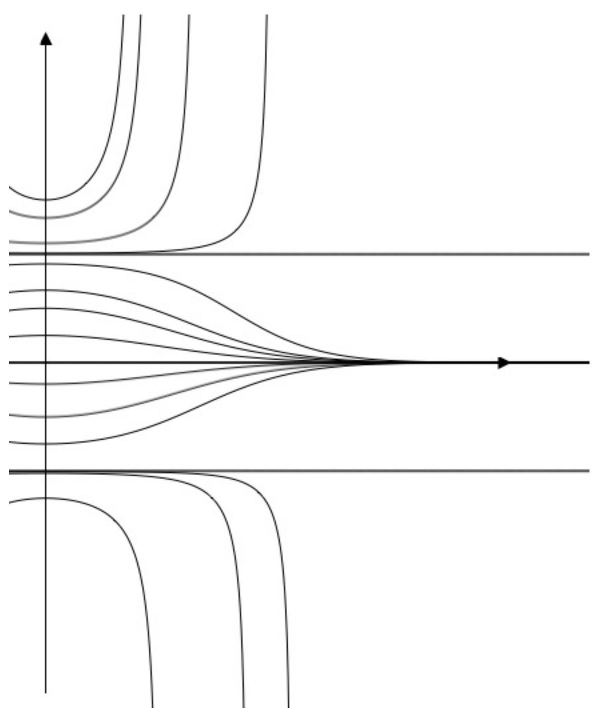
e quindi calcolando nel punto $(2,0)$ si ricava il sistema lineare

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}(2,0) + \frac{\partial y}{\partial u}(2,0) = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial u}(2,0) = 0, \end{cases}$$

ottenendo immediatamente

$$\frac{\partial y}{\partial u}(2,0) = 1.$$

Esercizio 5 Le soluzioni costanti sono $y_1(x) \equiv -1$, $y_2(x) \equiv 0$, $y_3(x) \equiv 1$. Per $x > 0$ tutte le soluzioni sono monotone e, per unicità, i loro grafici non si possono intersecare; la crescenza o decrescenza è data dal segno della derivata, ovvero dal segno di $y(x)(y^2(x) - 1)$ per $x > 0$. Si osserva che $z(z^2 - 1) > 0$ se e solo se $z > 1$ oppure $-1 < z < 0$. Quindi se una soluzione verifica $y(0) < -1$, oppure $-1 < y(0) < 0$, oppure $0 < y(0) < 1$, oppure $y(0) > 1$, allora $y(x)$ verificherà la stessa disuguaglianza per ogni $x > 0$.
In particolare, su $[0; +\infty[$ le soluzioni con $y(0) < -1$ saranno decrescenti e tenderanno a $-\infty$, per $x \to +\infty$ o magari per $x \to x_0^-$, con $x_0 > 0$; le soluzioni con $-1 < y(0) < 0$ saranno crescenti e tenderanno a 0; le soluzioni con $0 < y(0) < 1$ saranno decrescenti e tenderanno a 0; le soluzioni con $y(0) > 1$ saranno crescenti e tenderanno a $+\infty$ per $x \to +\infty$ o magari per $x \to x_0^-$, con $x_0 > 0$.
L'unico punto fisso stabile è $y_2(x) \equiv 0$ con bacino di attrazione $]-1; 1[$.



Esercizio 6 L'insieme A si trova nel primo quadrante. Le variabili comode per il calcolo sono $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$: infatti il dominio si trasforma in $[1;2] \times [1;2]$, lo Jacobiano della trasformazione $(u,v) \to (x,y)$ è

$$J(x,y) = \det \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v,$$

e pertanto, lo Jacobiano della trasformazione che ci serve, ossia $(x,y) \to (u,v)$, è

$$J^{-1}(u,v) = \frac{1}{2v}.$$

Essendo $y^2 = uv$ e $\frac{y}{x} = v$, si ha infine

$$\begin{aligned} I &= \int_A (1-y^2)\,\frac{y}{x}\,dxdy = \frac{1}{2}\int_1^2\int_1^2 (1-uv)\,dudv = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \int_1^2\int_1^2 uv\,dudv\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 \left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{9}{4}\right) = -\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Esercizio 7 Per il teorema della divergenza,

$$I = \int_{\partial E} \langle G, n\rangle\,ds = \int_E \operatorname{div} G(x,y)\,dxdy = \int_E 0\,dxdy = 0.$$

Esercizio 8 Non si può applicare direttamente il teorema della divergenza, in quanto il campo F non è differenzabile.
Però si osserva che sulla base comune dei due coni (che ha direzione normale (0,0,1)) il campo F ha la terza componente nulla, quindi esso ha flussi nulli attraverso questa base.
Ne deriva che il flusso uscente dalla sola superficie laterale del doppio cono è la somma dei flussi uscenti dalle superfici totali dei due coni.
Ora, sul cono pieno C^+, quello con vertice $(3,-2,1)$, si ha $F(x,y,z) = (x, 1-y, z)$; dunque, per il teorema della divergenza, detto n il versore normale esterno a C^+ si ha

$$\int_{\partial C^+} \langle F, n\rangle\,d\sigma = \int_{C^+} \operatorname{div} F\,dxdydz = \int_{C^+} 1\,dxdydz = m_3(C^+).$$

D'altronde, sul cono pieno C^- con vertice $(3,-2,-1)$ e versore normale esterno ν, si ha $F(x,y,z) = (x, 1-y, -z)$, e pertanto, ancora per il teorema della divergenza,

$$\int_{\partial C^-} \langle F, \nu\rangle\,d\sigma = \int_{C^-} \operatorname{div} F\,dxdydz = \int_{C^-} (-1)\,dxdydz = -m_3(C^-) = -m_3(C^+).$$

Quindi il flusso complessivo Φ, che è la somma dei flussi ottenuti, è nullo.

Esercizio 9 Poichè la funzione f è dispari, si ha $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo che i coefficienti di Fourier della somma di più funzioni sono le somme degli omologhi coefficienti di Fourier delle funzioni addendo; inoltre, i coefficienti di Fourier di $\sin 3x$ sono tutti nulli, ad eccezione di $b_1 = 1$. Quindi si ha per $n \neq 1$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx = \frac{1}{n\pi}\left[-\left[x\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}\right] + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[-\pi\cos n\pi + (-\pi)\cos n(-\pi)\right] + \frac{1}{n^2\pi}\left[\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[-\pi(-1)^n - \pi(-1)^n\right] + 0 = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

mentre $b_1 = 2 + 1 = 3$.

Risoluzione - seconda parte

Esercizio 1 (a) La funzione f è continua sul vincolo K assegnato, il quale è un insieme chiuso e limitato: pertanto f ha massimo e minimo su K. Per ragioni evidenti di simmetria, possiamo limitarci allo studio di f sul primo quadrante Q, definito da $x \geq 0$ e $y \geq 0$: scrivendo i punti di $K \cap Q$ come $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, dobbiamo trovare il massimo ed il minimo di

$$g(\vartheta) = (\cos\vartheta)^p + (\sin\vartheta)^p$$

per $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$.
Notiamo che se $p = 2$ la funzione f è costantemente uguale a 1 su K, quindi possiamo supporre $p \neq 2$.
Si ha $g(0) = g(\pi/2) = 1$, mentre

$$g'(\vartheta) = p(\cos\vartheta)^{p-1}(-\sin\vartheta) + p(\sin\vartheta)^{p-1}\cos\vartheta = p\sin\vartheta\cos\vartheta[(\sin\vartheta)^{p-2} - (\cos\vartheta)^{p-2}] = 0$$

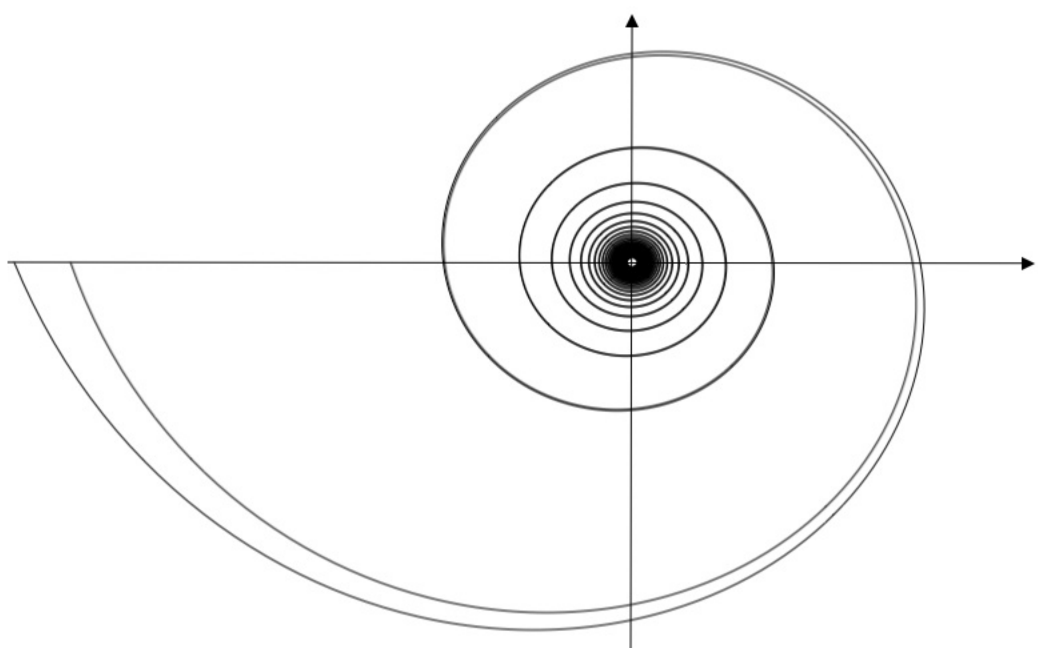
se e solo se $(\cos\vartheta)^{p-2} = (\sin\vartheta)^{p-2}$, cioè se e solo se $\cos\vartheta = \sin\vartheta$, vale a dire $\vartheta = \pi/4$. In tale punto si ha $g(\pi/4) = 2^{1-p/2}$.
In definitiva,

$$\max_K f = \max\{1, 2^{1-p/2}\}, \qquad \min_K f = \min\{1, 2^{1-p/2}\}.$$

Si può osservare che se $p > 2$ il massimo è 1, raggiunto nei quattro punti $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, ed il minimo è $2^{1-p/2}$, raggiunto nei quattro punti $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; se invece $0 < p < 1$, il massimo diventa minimo e il minimo diventa massimo, ed entrambi sono raggiunti negli stessi punti.

(b) L'insieme E, disegnato nella figura sottostante, è la regione compresa tra le due spirali S_1 e S_2. Possiamo quindi rappresentare E in coordinate polari (r, ϑ) mediante le relazioni

$$\frac{1}{\vartheta} \leq r \leq \frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^3}, \qquad \vartheta \in [\pi, \infty[\,.$$



Pertanto

$$\int_E \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_\pi^\infty \int_{\frac{1}{\vartheta}}^{\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\vartheta^3}} \frac{1}{r^2}\,r\,drd\vartheta = \int_\pi^\infty \ln \frac{\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\vartheta^3}}{\frac{1}{\vartheta}}\,d\vartheta = \int_\pi^\infty \ln\left(1+\frac{1}{\vartheta^2}\right)\,d\vartheta.$$

Poiché si ha

$$\ln\left(1+\frac{1}{\vartheta^2}\right) \simeq \frac{1}{\vartheta^2} \quad \text{per } \vartheta \to \infty,$$

si conclude che l'integrale $\int_E \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$ è finito.

(c) Come in (b), l'insieme F è delimitato dalle due spirali S_1 e S_3, e si ricava quindi, analogamente,

$$\int_F \frac{1}{|x|^p+|y|^p}\,dxdy = \int_\pi^\infty \int_{\frac{1}{\vartheta}}^{\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\vartheta^{\gamma+1}}} \frac{1}{r^p}\,r\,drd\vartheta.$$

Se $p=2$, si ottiene come in (b)

$$\int_E \frac{1}{|x|^p+|y|^p}\,dxdy = \int_\pi^\infty \ln\left(1+\frac{1}{\vartheta^\gamma}\right)\,d\vartheta,$$

e dato che $\ln\left(1+\frac{1}{\vartheta^\gamma}\right)$ si comporta come $\frac{1}{\vartheta^\gamma}$ per $\vartheta\to\infty$, si conclude che se $p=2$ l'integrale $\int_F \frac{1}{|x|^2+|y|^2}\,dxdy$ è finito se e solo se $\gamma>1$.
Se $p\neq 2$, si ha invece

$$\int_F \frac{1}{|x|^p+|y|^p}\,dxdy = \frac{1}{2-p}\int_\pi^\infty \left[\left(\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\vartheta^{\gamma+1}}\right)^{2-p} - \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{2-p}\right]d\vartheta,$$

e poiché

$$\left(\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\vartheta^{\gamma+1}}\right)^{2-p} - \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{2-p} = \frac{1}{\vartheta^{2-p}}\left[\left(1+\frac{1}{\vartheta^\gamma}\right)^{2-p}-1\right] \simeq \frac{2-p}{\vartheta^{2-p+\gamma}} \quad \text{per } \vartheta\to\infty,$$

si verifica che l'integrale $\int_F \frac{1}{|x|^p+|y|^p}\,dxdy$ è finito se e solo se

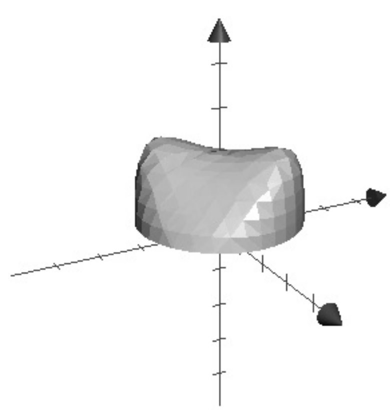
$$\int_\pi^\infty \frac{1}{\vartheta^{2-p+\gamma}}\,d\vartheta < \infty,$$

ossia se e solo se $2-p+\gamma>1$, vale a dire $\gamma>p-1$. Si noti che questo risultato si accorda con quello ottenuto nel caso $p=2$.

Esercizio 2 (a) La superficie S, disegnata qui accanto, è l'intersezione con il semispazio $z\geq 0$ della curva di livello 8 per la funzione $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^3e^{-xy}$, la quale è di classe C^∞ ed ha gradiente

$$\nabla f(x,y,z) = (2x - yz^3e^{-xy}, 2y - xz^3e^{-xy}, 3z^2e^{-xy})$$

sempre diverso da 0: infatti per $z>0$ è $f_z>0$, mentre per $z=0$ le quantità $f_x=2x$ e$f_y=2y$ non possono annullarsi simultaneamente, dato che l'origine non appartiene a S.



Si conclude che la superficie S è regolare, ossia è una 2-varietà, il cui bordo è l'intersezione di S con il piano $z=0$, ossia la circonferenza di centro $(0,0,0)$ e raggio $2\sqrt{2}$ del piano xy.

(b) Si ha per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div} F(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(-xy^2e^z)+\frac{\partial}{\partial y}(-x^2ye^z)+\frac{\partial}{\partial z}e^z(x^2+y^2)=-y^2e^z-x^2e^z+e^z(x^2+y^2)=0.$$

(c) Dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_S \langle F,n\rangle_3\,d\sigma,$$

ove n è il versore normale orientato in modo che la sua terza componente sia positiva. Poiché però F ha divergenza nulla, per il teorema della divergenza sarà nullo l'integrale sulla superficie chiusa costituita da S e dal disco $D=\{(x,y,z):\ z=0,\ x^2+y^2=8\}$ orientata secondo la normale esterna n, che su D è $(0,0,-1)$. Perciò

$$\int_S\langle F,n\rangle_3\,d\sigma=-\int_D\langle F,n\rangle_3\,d\sigma=+\int_D(x^2+y^2)\,d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{2}}r^2\,r\,dr d\vartheta=2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\sqrt{2}}=32\pi.$$

(d) L'intersezione $\Gamma=S\cap C$ è l'intersezione di due superfici regolari, i cui rispettivi vettori normali non sono paralleli nei punti di Γ: questo è banale, perché il vettore normale a C è $\nu=(2x,2y,0)$, ossia ha la terza componente nulla, a differenza del vettore ∇f, normale a S. Quindi la curva Γ ha in ogni suo punto (x,y,z) vettore tangente τ dato da $\nabla f\times\nu\neq 0$. Pertanto Γ è una curva regolare.
Dobbiamo ora calcolare l'integrale

$$\int_\Gamma\langle e^{-z}F,t\rangle_3\,ds,$$

ove il versore tangente $t=\frac{\tau}{|\tau|_3}$ va orientato nel verso coerente con l'orientazione di S prescelta. Però la parametrizzazione di Γ è scomoda.
La via più semplice consiste nell'osservare che Γ è il bordo della superficie cilindrica formata dalla parte di C delimitata da Γ, che chiameremo C', e dal disco $D'=\{(x,y,0):\ x^2+y^2\le 2\}$. Per il teorema di Stokes,

$$\int_\Gamma\langle e^{-z}F,\tau\rangle_3\,ds=\int_{C'\cup D'}\langle\operatorname{rot} e^{-z}F,n\rangle_3\,d\sigma,$$

ove n è la normale esterna a $C'\cup D'$, mentre

$$\operatorname{rot}(e^{-z}F)=\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ D_x & D_y & D_z\\ -xy^2 & -x^2y & x^2+y^2\end{pmatrix}=(2y,-2x,0).$$

Si nota che su C' l'integrando è nullo perché $n=\nu=\frac{1}{2\sqrt{2}}(2x,2y,0)$; lo stesso accade su D' essendo $n=(0,0,-1)$. Quindi $\int_\Gamma\langle e^{-z}F,\tau\rangle_3\,ds=0$.

Vi ´e una seconda via: osserviamo che Γ è anche bordo della parte di S che si proietta sulla base del cilindro C, che chiameremo Σ. Per il teorema di Stokes si ha:

$$\int_\Gamma\langle e^{-z}F,\tau\rangle_3\,ds=\int_\Sigma\langle\operatorname{rot}(e^{-z}F),n\rangle_3\,d\sigma,\qquad \text{ove}\quad n=\frac{\nabla f}{|\nabla f|_3}.$$

Si noti che Σ è una superficie cartesiana, con dominio base il disco D', e con versore normale n (coerente con t); inoltre su Σ vale $z^3 e^{-xy} = 8 - x^2 - y^2$ e $d\sigma = |\nabla f|_3\, dxdy$. Pertanto

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \langle \mathrm{rot}\,(e^{-z}F), n\rangle_3\, d\sigma = \int_{D'} \langle \mathrm{rot}\,(e^{-z}F), \nabla f\rangle_3\, dxdy = \\
&\quad = \int_{D'} (4xy - 2y^2 z^3 e^{-xy} - 4xy + 2x^2 z^3 e^{-xy})\, dxdy = \int_{D'} 2(x^2 - y^2)(8 - x^2 - y^2)\, dxdy = \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)(8 - r^2) r\, dr d\vartheta = 0,
\end{aligned}$$

dato che $\int_0^{2\pi} (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\, d\vartheta = 0$.