Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale
Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli
11 settembre 2015 - quarto appello - prima parte (un'ora)

N. MATR./ANNO ISCR.		COGNOME	
DOCENTE/ CREDITI		NOME	

Istruzioni al fine della valutazione:
- *compilate l'intestazione in stampatello.* Ai quesiti contrassegnati con [12] deve rispondere chi deve farsi riconoscere 12 crediti.
- scrivete *solo le risposte* su questo foglio, *l'unico* da restituire;
-*ricopiate a parte* le vostre risposte per confrontarle con quelle ufficiali.

Esercizio 1 Calcolare il volume V del parallelepipedo tridimensionale in $\mathbb{R}^4$ con vertici: $O = (0,0,0,0)$, $A = (1,2,0,0)$, $B = (1,0,2,0)$, $C = (1,0,0,2)$, $A+B$, $A+C$, $B+C$, $A+B+C$. **V** $=$

Esercizio 2 Sia $f_n(x) = \sqrt[n]{1+|3x|^n}$. Per quali $a \geq 0$ la successione converge uniformemente nella semiretta $[a;+\infty[$? **a** $\in$

Esercizio 3 Dati $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+4y}$ e $D = \{(x,y):\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq xy \leq 1\}$, si determinino, se esistono: i punti P_M di massimo relativo e P_m di minimo relativo all'interno di D, i punti F_M di massimo relativo e F_m di minimo relativo vincolati sulla frontiera di D.
$\mathbf{P_M} =$ $\mathbf{P_m} =$ $\mathbf{F_M} =$ $\mathbf{F_m} =$

Esercizio 4 In quali punti l'insieme delle soluzioni di $\begin{cases} x^2+y^2 & =1 \\ x^2+z^2 & =1 \end{cases}$ non è localmente un grafico?

Esercizio 5 Calcolare l'integrale $\mathcal{I} = \int_T \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, ove $T = \{(x,y,z) : 25 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 100\}$. $\mathcal{I} =$

Esercizio 6 Calcolare l'area **A** della superficie definita dalle relazioni $z = 1-x^2-y^2$, $0 \leq z$, $0 \leq x$. **A** $=$

Esercizio 7 Si calcoli il flusso Φ del campo (x,y,z) attraverso la superficie $\Sigma(\phi,\psi) = (\sin\varphi, \sin\varphi, 1-\cos\psi)$, $(\varphi,\psi) \in [0;\frac{\pi}{2}] \times [0;\frac{\pi}{2}]$, orientata dal versore $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ nel punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. $\mathbf{\Phi} =$

Esercizio 8 Dato il campo $F(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$, se ne calcoli il flusso Ψ attraverso la superficie definita dalle relazioni $y \geq 0$, $x^2+y^2+z^2 = 1$ ed orientata dal versore $(1,0,0)$ nel punto $(1,0,0)$. $\mathbf{\Psi} =$

---

[12]**Esercizio 9** Si calcolino i coefficienti di Fourier in $[-\pi;\pi]$ della funzione $e^x + e^{-x}$.
$\mathbf{a}_n =$ $\mathbf{b}_n =$

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale
Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli
11 settembre 2015 - quarto appello - seconda parte (due ore)

N. MATR./ANNO ISCR.		COGNOME	
DOCENTE/ CREDITI		NOME	

Istruzioni al fine della valutazione: *compilare l'intestazione in stampatello.*
Si risolva almeno un esercizio, in tutti i punti, *riportando con ordine* lo svolgimento della soluzione e *motivandolo accuratamente.*

Esercizio 1
(a) Si mostri che la funzione $f(x,y,z,w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ sull'insieme definito da $g(x,y,z,w) = xyzw = 1$ assume come valore minimo 4, e se ne trovino i punti di minimo.
Si consideri quindi il sottoinsieme Z di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$Z = \{(x,y,z,w) : \ f(x,y,z,w) = 10, \ xyzw = 1\}.$$

(b) Si mostri che in un intorno del punto $(1,1,2,2)$ l'insieme Z è grafico delle (z,w) in funzione delle (x,y).
(c) Si determini il piano (bidimensionale) tangente a Z nel punto dato, e si calcoli $\frac{\partial w}{\partial x}{}_{|x=1,y=1}$.
(d) Si dica se nel diedro $x > 0, \ y > 0 \ , z > 0, \ w > 0$ l'insieme Z è globalmente il grafico di una funzione vettoriale di due variabili.

Esercizio 2 Si consideri lo spezzone di elica cilindrica $\gamma : [0;\alpha] \to \mathbb{R}^3$ dato da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ con con $t \in [0,\alpha]$, ove α è un numero compreso fra 0 e π.
(a) Si consideri l'insieme Σ ottenuto ruotando attorno all'asse verticale orientato dal versore $(0,0,1)$, in senso antiorario, il sostegno della curva γ, via via per gli angoli $\vartheta \in [0;\beta]$, ove β è un numero compreso fra 0 e π. Si mostri che è una $2-$varietà parametrica orientabile, con bordo regolare a tratti e si determini una parametrizzione del bordo stesso.
(b) Si consideri quindi il campo vettoriale $V = (1, x, z^3)$ e l'orientazione di Σ determinata dal versore $N = (1,0,0)$ nel punto $P = (1,0,0)$. Detto $\Phi(\alpha,\beta)$ il flusso di V attraverso la superficie Σ così orientata, si calcoli il massimo di Φ con l'ulteriore vincolo $\alpha + \beta \leq \pi$.

Risoluzione - prima parte

Esercizio 1 Se M è la matrice che ha come righe i vettori A, B e C, ossia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

risulta, come è noto,

$$V = \sqrt{\det(M \cdot {}^tM)}.$$

Poiché

$$\det(M \cdot {}^tM) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 112,$$

si trova $V = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$.

Esercizio 2 Fissato n, la funzione f_n è pari e positiva in $[0, \infty[$. Per $n \to \infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{3}, \\ 3x & \text{se } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Per analizzare la convergenza uniforme conviene analizzare separatamente le due quantità positive

$$f_n(x) - 1, \quad 0 \le x \le \frac{1}{3}; \qquad f_n(x) - 3x, \quad x > \frac{1}{3}.$$

Nel primo caso, $f_n(x) - 1$ è monotona crescente, cosicché

$$\sup_{0\le x\le \frac{1}{3}} [f_n(x) - 1] = f_n\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = \sqrt[n]{2} - 1 \to 0 \quad \text{per } n \to \infty;$$

nel secondo caso, invece, $f_n(x) - 3x$ è decrescente, in quanto con qualche calcolo si trova

$$f_n'(x) = 3\left[\left(\frac{3x}{\sqrt[n]{1 + (3x)^n}}\right)^{n-1} - 1\right] < 0 \qquad \forall x > \frac{1}{3};$$

quindi

$$\sup_{x>\frac{1}{3}} [f_n(x) - 3x] = f_n\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = \sqrt[n]{2} - 1 \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Pertanto la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[0, \infty[$, e la risposta al quesito è $a \in [0, \infty[$.

Esercizio 3 La funzione f è non negativa su D e di classe C^∞ all'interno di D. Cerchiamo i punti stazionari interni a D. Si ha, con facili calcoli,

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{8xy^2}{(x^2 + 4y)^2}, \frac{x^4}{(x^2 + 4y)^2}\right),$$

quindi il gradiente di f si annulla in $(0,y)$ per ogni $y>0$, tutti punti che non sono interni a D. Vediamo che succede lungo la frontiera, che è composta dai due semiassi cartesiani positivi (lungo i quali f si annulla) e dal ramo d'iperbole $y=\frac{1}{x}$, $x>0$. I due semiassi sono tutti punti di minimo assoluto (e relativo). Lungo l'iperbole si ha

$$\frac{d}{dx} f\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\frac{x^2}{x^3+4} = \frac{8x-x^4}{(x^3+4)^2} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^3 \leq 8,$$

quindi la restrizione di f a questo ramo d'iperbole ha un punto di massimo in $x=2$; perciò f ha un punto di massimo vincolato in $(2,\frac{1}{2})$. Siccome

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(x, \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} f\left(x, \frac{1}{x}\right) = 0,$$

(infatti la funzione è minore sia di $\frac{1}{x}$, sia di $\frac{x^2}{4}$), il punto $(2,\frac{1}{2})$ è necessariamente il punto di massimo assoluto per f in D. In conclusione: nessun punto di massimo relativo interno, nessun punto di minimo relativo interno; il punto $(2,\frac{1}{2})$ è di massimo vincolato (e assoluto), i punti $(0,y)$ e $(x,0)$ con $x>0$ e $y>0$ sono punti di minimo vincolati (e assoluti). In particolare

$$\min_D f = 0, \qquad \max_D f = \frac{1}{3}\,.$$

Esercizio 4 L'insieme

$$Z = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2=1,\ x^2+z^2=1\},$$

è l'intersezione di due superfici cilindriche fra loro ortogonali. Bisogna cercare i punti di Z nei quali la matrice Jacobiana della funzione $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2+y^2, x^2+z^2)$ non ha rango massimo, vale a dire ha rango minore di 2 (infatti se il rango è massimo l'insieme Z sarà localmente un grafico in virtù del teorema del Dini).
Risulta

$$\mathbf{DF}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix},$$

quindi i tre determinanti valgono $4yz$, $-4xz$, $-4xy$. Se ne deduce che i punti dove lo Jacobiano non ha rango massimo sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} yz=0 \\ xz=0 \\ xy=0 \\ x^2+y^2=1 \\ x^2+z^2=1, \end{cases}$$

e calcoli banali ci dicono che i punti in questione sono $\pm(1,0,0)$.
Si noti che, a rigore, ciò non dinostra che intorno a questi punti l'insieme Z non sia un grafico, in quanto il teorema del Dini fornisce solo una condizione sufficiente. Tuttavia nel nostro caso effettivamente Z non è localmente un grafico in tali punti: infatti le due curve regolari

$$\gamma_1(t)=(\cos t,\sin t,\sin t), \quad \gamma_2(t)=(\cos t,\sin t,-\sin t), \qquad t\in[-\pi,\pi],$$

giacciono su Z, passano per $(1,0,0)$ e in tale punto hanno versori tangenti distinti, per la precisione $\tau_1 = (0,1,1)$ e $\tau_2 = (0,1,-1)$. Similmente, le curve $-\gamma_1$ e $-\gamma_2$ passano per $(-1,0,0)$ e in tale punto hanno versori tangenti distinti.

Esercizio 5 L'insieme T è una corona sferica di raggi 5 e 10. Quindi, utilizzando le coordinate sferiche, si ha

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_5^{10} \frac{1}{r} r^2 \sin\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \int_5^{10} r \, dr = 2\pi(100-25) = 150\pi.$$

Esercizio 6 La superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \; x = 1 - x^2 - y^2, \; z \geq 0, \; x \geq 0\}$$

è cartesiana ed è definita sul semidisco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \; x^2 + y^2 \leq 1, \; x \geq 0\}$. Quindi, come si sa, posto $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ l'elemento d'area su questa superficie è

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)!^2} \, dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)} \, dxdy,$$

e dunque utilizzando le coordinate polari l'area di S è

$$\mathbf{A} = \int_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)} \, dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{1+4r^2} \, r \, dr d\vartheta = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \sqrt{1+4t} \, dt = \frac{\pi}{12}(5^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Esercizio 7 Risulta

$$D\Sigma = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 \\ \cos\phi & 0 \\ 0 & \sin\psi \end{pmatrix};$$

quindi il versore normale a Σ è

$$n = \pm(\cos\phi \sin\psi, -\cos\phi\sin\psi, 0),$$

e secondo l'orientazione prefissata occorre scegliere il segno $+$: infatti con questa scelta nel punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, che corrisponde a $\phi = \frac{\pi}{6}$ e $\psi = \frac{\pi}{3}$, si ha $n = (\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, 0)$ che, normalizzato, dà $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
Quindi, posto $G(x,y,z) = (x,y,z)$, la componente di G lungo n nei punti di Σ è data da

$$\langle G, n\rangle = \sin\phi\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\phi\sin\psi = 0.$$

Se ne conclude che il flusso Φ del campo G attraverso la superficie Σ è nullo.

Esercizio 8 La superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \; x^2+y^2+z^2 = 1, \; y \geq 0\}$ è la semisfera di centro l'origine e raggio 1 contenuta nel semispazio $y \geq 0$, orientata dal versore normale che punta verso l'esterno della sfera. Conviene chiudere questa superficie aggiungendole il "tappo" costituito dal disco D del piano $y = 0$, definito da $x^2 + z^2 = 1$; su D la normale è $(0,-1,0)$ e quindi non vi è contributo al flusso del campo F (infatti $\langle F, n\rangle = -2y = 0$ nei punti di tale disco). Sia $\overline{S}$ la superficie chiusa $S \cup D$: per il teorema della divergenza,

$$\int_{S\cup D} \langle F, n\rangle \, d\sigma = \int_E \operatorname{div} F \, dxdydz,$$

ove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \; x^2+y^2+z^2 = 1, \; y \geq 0\}$. Dato che su D il flusso di D è nullo, si ha

$$\Psi = \int_S \langle F, n\rangle \, d\sigma = \int_{S\cup D} \langle F, n\rangle \, d\sigma = \int_E \operatorname{div} F \, dxdydz,$$

e osservando che $\mathrm{div} F = 2$ in E, si conclude, senza fare calcoli, che

$$\Psi = 2\, m_3(E) = \frac{4\pi}{3}\,.$$

Esercizio 9 La funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ è pari. Quindi $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Inoltre,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} [e^x + e^{-x}]\, dx = \frac{2}{\pi}[e^{\pi} - e^{-\pi}],$$

mentre, con due integrazioni per parti, per $n \in \mathbb{N}^+$ si ha

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} [e^x + e^{-x}]\cos nx\, dx = \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[[e^x + e^{-x}]\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}[e^x - e^{-x}]\sin nx\, dx = \\ &= 0 + \frac{2}{n^2\pi}\left[[e^x - e^{-x}]\cos nx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n^2}\, a_n; \end{aligned}$$

pertanto

$$a_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}\,\frac{2}{n^2\pi}\left[[e^x - e^{-x}]\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^n}{\pi(1+n^2)}[e^{\pi} - e^{-\pi}].$$

Risoluzione - seconda parte

Esercizio 1 (a) Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, dobbiamo annullare il gradiente della funzione

$$L(x, y, z, w, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + \lambda(xyzw - 1).$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2x + \lambda yzw = 0 \\ 2y + \lambda xzw = 0 \\ 2z + \lambda xyw = 0 \\ 2w + \lambda xyz = 0 \\ xyzw = 1. \end{cases}$$

Eliminando λ si trovano le relazioni

$$\frac{x}{yzw} = \frac{y}{xzw} = \frac{z}{xyw} = \frac{w}{xyz},$$

dalle quali segue $x^2 = y^2 = z^2 = w^2$: dall'ultima equazione segue

$$x^2 = y^2 = z^2 = w^2 = 1.$$

L'ultima equazione ci dice che le quattro variabili valgono tutte 1, oppure tutte -1, oppure ancora due di esse valgono 1 e due di esse -1. Si ottengono pertanto gli 8 punti stazionari vincolati

$$\pm(1, 1, 1, 1), \quad \pm(1, 1, -1 - 1), \quad \pm(1. - 1, 1, -1), \quad \pm(1, -1, -1, 1),$$

nei quali la f vale 4. Verifichiamo che questi punti sono di minimo: la funzione f ha certamente minimo sul compatto

$$K = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4;\ xyzw = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 100\};$$

sulla parte del bordo di K in cui $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 100$, ovviamente, f ha massimo uguale a 100, mentre il suo minimo deve stare in un punto stazionario vincolato della regione dove $xyzw = 1$ ma $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 < 100$. Gli unici punti stazionari vincolati sono quelli precedentemente trovati, dove f vale 4, e pertanto il minimo di f deve essere 4 e quei punti sono punti di minimo.

(b) Consideriemo la funzione $\mathbf{G} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\mathbf{G}(x, y, z, w) = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2, xyzw).$$

La sua matrice Jacobiana è

$$\mathbf{DG}(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z & 2w \\ yzw & xzw & xyw & xyz \end{pmatrix},$$

e la sua sottomatrice di estrema destra ha determinante

$$\det \begin{pmatrix} 2z & 2w \\ xyw & xyz \end{pmatrix} = 2(z^2 - w^2)xy,$$

che nel punto $(1, 2, 2, 1)$ vale -12: quindi esso è non nullo. Pertanto è possibile, in un opportuno intorno di $(1, 2, 2, 1)$, scrivere il sistema $\mathbf{G}(x, y, z, w) = 0$ come grafico di una funzione vettoriale della forma

$$z = h(x, y), \qquad w = k(x, y),$$

con h e k funzioni di classe C^∞.

(c) L'equazione del piano tangente a Z nel punto $(1, 2, 2, 1)$ è

$$\mathbf{DG}(1,2,2,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-2 \\ w-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-2 \\ w-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4y+4z+2w-20 \\ 4x+2y+2z+4w-24 \end{pmatrix} = 0.$$

Poi, derivando rispetto a x l'identità vettoriale $\mathbf{G}(x, y, h(x, y), k(x, y)) = 0$, si ottiene

$$\begin{cases} 2x + 2h(x,y)\, h_x(x,y) + 2k(x,y)\, k_x(x,y) = 0 \\ y\, h(x,y)k(x,y) + xy\, h_x(x,y)\, k(x,y) + xy\, h(x,y)\, k_x(x,y) = 0; \end{cases}$$

Calcolando in $(1, 2, 2, 1)$ si ha, essendo $h(1, 2) = 2$ e $k(1, 2) = 1$,

$$\begin{cases} 2 + 4\, h_x(1,2) + 2k_x(1,2) = 0 \\ 4 + 2\, h_x(1,2) + 4\, k_x(1,2) = 0, \end{cases}$$

da cui, sottraendo alla seconda equazione la prima raddoppiata,

$$-6\, h_x(1, 2) = 0,$$

ossia $h_x(1, 2) = 0$.

(d) Se Z fosse un grafico $z = h(x, y)$, $w = k(x, y)$ definito per $x > 0$ e $y > 0$, con $z > 0$ e $w > 0$, avremmo

$$z^2 + w^2 = 10 - x^2 - y^2, \qquad z^2 w^2 = \frac{1}{x^2 y^2};$$

quindi z^2 e w^2 sarebbero le due soluzioni (positive) dell'equazione algebrica di secondo grado

$$t^2 - (10 - x^2 - y^2)t + \frac{1}{x^2 y^2} = 0.$$

che sono

$$t = \frac{1}{2} \left(10 - x^2 - y^2) \pm \sqrt{(10 - x^2 - y^2)^2 - \frac{4}{x^2 y^2}} \right),$$

a patto che il discriminante $(10 - x^2 - y^2)^2 - \frac{4}{x^2y^2}$ sia positivo. Ma è evidente che per x e y positivi e sufficientemente piccoli si ha al contrario $(10 - x^2 - y^2)^2 - \frac{4}{x^2y^2} < 0$: quindi l'aeuqzione di secondo grado sopra scritta nopn ha soluzioni reali. Abbiamo così un assurdo: pertanto la risposta al quesito è no.

Esercizio 2 **(a)** La rotazione di $\mathbb{R}^3$, di angolo ϑ, che lascia fisso l'asse z è descritta dalla matrice

$$\mathbf{R}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 1 \end{pmatrix};$$

quindi la superficie Σ è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\vartheta)\gamma(t),$$

ossia

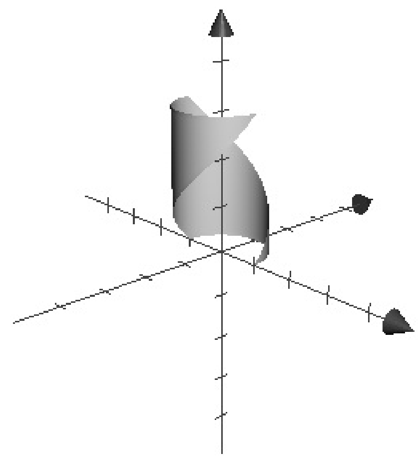
$$\begin{cases} x = \cos\vartheta\cos t - \sin\vartheta\sin t = \cos(\vartheta + t) \\ y = \sin\vartheta\cos t + \cos\vartheta\sin t = \sin(\vartheta + t) \qquad \vartheta \in [0, \beta],\ t \in [0, \alpha]. \\ z = t, \end{cases}$$

Dunque

$$D\Sigma = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta + t) & \sin(\vartheta + t) \\ \cos(\vartheta + t) & \cos(\vartheta + t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cosicché il vettore normale a Σ è il vettore

$$\Sigma_\vartheta \times \Sigma_t = \pm \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta + t) \\ -\sin(\vartheta + t) \\ 0 \end{pmatrix},$$



e questa espressione, a parte il segno, è un versore che è funzione continua di ϑ e t su $[0, \pi] \times [0, \pi]$: quindi la superficie Σ è orientabile. Il fatto che in $(1, 0, 0)$ il versore normale sia $(1, 0, 0)$ ci obbliga a scegliere per N il segno $-$: pertanto il versore

$$N = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta + t) \\ \sin(\vartheta + t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

fornisce l'orientazione globale di Σ richiesta.
Il bordo di Σ è l'unione delle quattro curve Γ_1, Γ_2, Γ_3 e Γ_4, parametrizzate da

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1 = \{(\cos t, \sin t, t) :\ t \in [0, \alpha]\}, && \text{verso delle } t \text{ crescenti}, \\
&\Gamma_2 = \{(\cos\vartheta, \sin\vartheta, \alpha) :\ \vartheta \in [0, \beta]\}, && \text{verso delle } \vartheta \text{ crescenti}, \\
&\Gamma_3 = \{(\cos(t + \beta), \sin(t + \beta), t) : t \in [0, \alpha]\}, && \text{verso delle } t \text{ decrescenti}, \\
&\Gamma_4 = \{(\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0) :\ \vartheta \in [0, \beta]\}, && \text{verso delle } \vartheta \text{ decrescenti}.
\end{aligned}$$

(b) Calcoliamo il flusso di V attraverso Σ. Si ha

$$\langle V, N\rangle = \cos(\vartheta + t) + \cos(\vartheta + t)\sin(\vartheta + t) + 0,$$

e quindi, essendo

$$d\Sigma = |\Sigma_\vartheta \times \Sigma_t|\, d\vartheta dt = d\vartheta dt,$$

troviamo

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha,\beta) &= \int_\Sigma \langle V,N\rangle\, d\Sigma = \int_0^\alpha\int_0^\beta [\cos(\vartheta+t)+\cos(\vartheta+t)\sin(\vartheta+t)]\, d\vartheta dt = \\ &= \int_0^\alpha\int_0^\beta \left[\cos(\vartheta+t)+\frac{1}{2}\sin(2\vartheta+2t)\right] d\vartheta dt = \\ &= \int_0^\alpha \left[\sin(\beta+t)-\sin t-\frac{1}{4}\cos(2\beta+2t)+\frac{1}{4}\cos 2t\right] dt = \\ &= -\cos(\beta+\alpha)+\cos\beta+\cos\alpha-1-\frac{1}{8}\sin(2\beta+2\alpha)+\frac{1}{8}\sin 2\beta+\frac{1}{8}\sin 2\alpha.\end{aligned}$$

Per determinare il massimo di Φ sul dominio

$$B=\{(\alpha,\beta)\in[0,\pi]^2:\ \alpha+\beta\le\pi\},$$

osserviamo anzitutto che sulla frontiera di B risulta

$$\Phi(\alpha,0)=0,\qquad \Phi(0,\beta)=0,\qquad \Phi(\alpha,\pi-\alpha)=0,$$

quindi il massimo di Φ in B è raggiunto in qualche punto interno. Annulliamo il gradiente di Φ:

$$\begin{cases}\Phi_\alpha(\alpha,\beta)=\sin(\beta+\alpha)-\sin\alpha-\frac{1}{4}\cos(2\beta+2\alpha)+\frac{1}{4}\cos 2\alpha=0\\ \Phi_\beta(\alpha,\beta)=\sin(\beta+\alpha)-\sin\beta-\frac{1}{4}\cos(2\beta+2\alpha)+\frac{1}{4}\cos 2\beta=0.\end{cases}$$

Questo sistema, di cui cerchiamo soluzioni (α,β) con $\alpha>0$ e $\beta>0$, si traduce nelle due uguaglianze

$$\sin(\beta+\alpha)-\frac{1}{4}\cos(2\beta+2\alpha)=\sin\alpha-\frac{1}{4}\cos 2\alpha=\sin\beta-\frac{1}{4}\cos 2\beta,$$

le quali ci dicono che la funzione

$$g(t)=\sin t-\frac{1}{4}\cos 2t,\qquad t\in[0,\pi],$$

calcolata nei tre numeri positivi α, β e $\alpha+\beta$, assume lo stesso valore y_0. Analizziamo la funzione g: si ha $g(0)=g(\pi)=-\frac{1}{4}$,

$$g'(t)=\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t=\cos t(1+\sin t)>0\qquad\Longleftrightarrow\qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\,.$$

Quindi g ha massimo in $\frac{\pi}{2}$. Se il valore y_0 è il massimo di g, allora $\alpha=\beta=\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, il che è impossibile. Quindi y_0 ha esattamente due controimmagini distinte. Ne segue che due, e solo due, dei tre numeri α, β e $\alpha+\beta$ devono coincidere, ossia deve valere una, e solo una, delle relazioni seguenti:

$$\alpha+\beta=\alpha,\quad\text{oppure}\quad \alpha+\beta=\beta,\quad\text{oppure}\quad \alpha=\beta.$$

Le prime due eventualità però dicono che $\beta=0$ oppure $\alpha=0$, casi che dobbiamo escludere; quindi deve essere $\alpha=\beta$, da cui $\alpha+\beta=2\alpha$: si ha perciò $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi$.
Adesso osserviamo che la g verifica

$$g(t)=g(\pi-t)\qquad\forall t\in[0,\pi];$$

quindi abbiamo

$$y_0 = g(\alpha) = g(2\alpha) = g(\pi - \alpha);$$

siccome i punti 2α e $\pi - \alpha$ si trovano in $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, e hanno la stessa immagine, essi devono coincidere; dall'uguaglianza $2\alpha = \pi - \alpha$ segue, finalmente, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$. Quindi il punto di massimo è $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, e si ha

$$\Phi\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \max_B \Phi = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$