

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2015-2016.

Ingegneria Civile Ambientale Edile

Paolo Acquistapace, Nicola Cavallucci,
Stefano Giofrè, Roberta Marziani, Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 1, dal 24 Settembre al 2 Ottobre 2015
STUDI ELEMENTARI DI FUNZIONI
CON PIÙ VARIABILI REALI E VETTORIALI

ESERCIZIO n.1 Si disegnino in maniera approssimativa i sottoinsiemi dal piano definiti da $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = f(a, b)\}$, al variare di f e di (a, b) nei casi seguenti:

$$x^2 - y^2, (2, -1); \quad y^3 - x^2, (0, 0); \quad (y - x^2)^2 - x^4, (0, 0); \quad \frac{x-y}{x+y}, (1, 1); \quad \cos \frac{x}{y}, (\pi, 4); \\ e^{xy}, (2, 0); \quad \frac{x}{x^2+y^2}, (1, 2).$$

ESERCIZIO n. 2 Per le seguenti funzioni si disegnino gli insiemi di livello

$$\{(x, y) : f(x, y) = 1\}, \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 1\}.$$

a) $f(x, y) = x^2 + y^2;$

b) $f(x, y) = |x| + |y|;$

c) $f(x, y) = \max\{|x|, |y|\};$

d) $f(x, y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ al variare di $p > 1;$

ESERCIZIO n. 3 a- La funzione $f(x, y) = \left(\frac{x-xy}{2xy}\right)$ da \mathbf{R}^2 in se è iniettiva? È surgettiva?

b- Sia $f(x, y) = \left(\frac{x^2+y^2}{2xy}\right) = (u, v)$: si studi l'immagine di f , si studi al variare di (u, v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u, v)\}$.

e) $f(x, y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ al variare di $p \in]0; 1[;$

f) $f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|;$

g) $f(x, y) = \log(e \cdot \operatorname{artan}(x^2 + y^2 - 4)).$

ESERCIZIO n. 4 Si disegnino in modo approssimativo i sottoinsiemi di \mathbf{R}^3 :

$$\{(x, y, z) : 2 = 3x + 5y + 7z\};$$

$$\{(x, y, z) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 121\}; \quad \{(x, y, z) : (2x - 10)^2 + 9y^2 + z^2 \geq 111\};$$

$$\{(x, y, z) : x = z^2 + y^2\}; \quad \{(x, y, z) : x + y + z = 2x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4zx - 4zy\};$$

$$\{(x, y, z) : x^2 - y^2 = z\}; \quad \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}; \quad \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq -1\};$$

$$\{(x, y, z) : x^2 - 4y^2 = 9z^2\}; \quad \{(x, y, z) : 2z^2 = x^2 + y^2\};$$

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 6\sqrt{x^2 + y^2} + 5 = 0\}; \quad \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} = \cosh z\};$$

$$\{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| = 1\}; \quad \{(x, y, z) : \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1\}.$$

ESERCIZIO n.5 Si studi l'immagine delle seguenti funzioni:

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (\sin 2t, \cos 2t), \quad t \in \mathbf{R} \mapsto (t^2, t^3), \quad t \in \mathbf{R} \mapsto (t \cos t, t \sin t), \quad t \in \mathbf{R} \mapsto (\cos t, \sin t, t),$$

$$t \in]2; 3[\mapsto (t + 1, 2t + 3, 3t + 4), \quad (s, t) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (s, t, s + t), \quad (s, t) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (s, t, s^2 + t^2).$$

ESERCIZIO n. 6 Determinare e rappresentare graficamente il dominio di definizione D delle seguenti funzioni:

- a) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2+21y^2-10xy}{x+4y}}$, $f : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$;
 b) $f(x, y, z) = \log \frac{x^2+y^2-1}{x+y+z}$, $f : D \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$;
 c) $f(x, y, z) = \left(\operatorname{arctan} \frac{x+y-z}{y(x^2-4)}, \operatorname{arsin}(x^2 - y^2 - z^2) \right)$ $f : D \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$.
 d) $f(t) = (\cos 2t + 2 \cos t, 2 \sin t, \sin 2t)$, $f : D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$

ESERCIZIO n. 7 a) Quale delle funzioni del precedente esercizio è limitata?

b) Quale è iniettiva?

c) Quale surgettiva?

ESERCIZIO n. 8 Si dia un'idea saliente del comportamento dei grafici delle seguenti funzioni:

a) $f(x, y) = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y$.

b) $g(x, y) = (f(x, y))^4$.

c) $h(x, y) = xy^2$.

ESERCIZIO n. 9 [Impegnativo] Data $f(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)) =: (x^3, y^3, z^3)$

a) La funzione è bigettiva da \mathbf{R}^3 in sé. Se nel sistema di coordinate usuale un punto corrisponde a $(1, 2, 3)$ quali sono le coordinate nel sistema non lineare (X, Y, Z) ?

b) Si consideri la legge di moto (retta parametrica) $\gamma(t) = t(1, 2, 3)$ nell'usuale sistema di coordinate. Qual'è la velocità nel nuovo sistema di coordinate?

c) Si consideri il lavoro compiuto dalla forza espressa nelle coordinate (X, Y, Z) dalla terna costante $(1, 2, 3)$ su una generica curva, espressa, sempre in questo sistema di coordinate, da $A(t) = (U(t), V(t), W(t))$. Nelle coordinate usuali (x, y, z) come si esprime il lavoro di questa forza lungo una curva espressa nelle stesse da $a(t) = (u(t), v(t), w(t))$?

ESERCIZIO n. 10 [Impegnativo] In \mathbf{R}^3 vi è qualche retta per l'origine, identificata dal suo piano ortogonale Π di equazione $ax + by + cz = 0$, rispetto alla quale il sostegno (immagine) della curva $\gamma(s) = (s + s^4, s - s^4, s + s \sin s)$ sia grafico di una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \Pi$?

ESERCIZIO n. 11 Si trovi, come luogo di zeri, il piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ nel punto $(1, 1, 2)$.

ESERCIZIO n. 12 Si considerino le due curve $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ e $\beta(t) = (\cos t, 2 \sin t, 3t)$. Calcolare la derivata rispetto a t della curva $\alpha(t) \times \beta(t)$.

ESERCIZIO n. 13 Si consideri $f(x, y) = (X(x, y), Y(x, y)) =: (y - x^2, y - e^{2x} - 2x)$

a) La funzione è bigettiva da \mathbf{R}^2 in sé?

b) Si disegnino gli insiemi di livello di $X + Y$.

ESERCIZIO n. 14 Si consideri $f(x, y) = (X(x, y), Y(x, y)) =: (x^3 - y, y^3 + x)$, $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$.

a) Si verifichi che f è iniettiva e surgettiva.

b) Si disegnino i generici insiemi di livello delle funzioni X ed Y componenti della funzione vettoriale f .

ESERCIZIO n. 15 a- La funzione $f(x, y) = \begin{pmatrix} x-xy \\ 2xy \end{pmatrix}$ da \mathbf{R}^2 in se è iniettiva? È surgettiva?

b- Sia $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = (u, v)$: si studi l'immagine di f , si studi al variare di (u, v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u, v)\}$.

ESERCIZIO n. 16 Trovare i valori di massimo e minimo, se esistono, della funzione $f(x, y) = \log(x + y)$ sul cerchio di centro l'origine e raggio 2.

ESERCIZIO n. 17 Trovare i valori di massimo e minimo, se esistono, della funzione $f(x, y, z) = |x - yz|$ sul cubo $[0, 1]^3 = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$.

ESERCIZIO n. 18 Trovare una parametrizzazione per, ovvero una funzione che abbia come immagine, l'intersezione dei grafici delle funzioni $f(x, y) = 3 - x^2 - 2y^2$ e $g(x, y) = x^2 + y^2$.

ESERCIZIO n. 19 Si trovino, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto sulla sfera unitaria di centro l'origine della funzione distanza dalla retta $t(1, 2, 3) + (4, 5, 6)$.

ESERCIZIO n. 20 Si trovi la minima distanza del punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dal grafico (t, t^2) , $t \in \mathbf{R}$.
