Analisi Matematica II, Anno Accademico 2015-2016.

Ingegneria Cvile Ambientale Edile

Paolo Acquistapace, Nicola Cavallucci,
Stefano Gioffrè , Roberta Marziani, Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 2, dal 24 Settembre al 2 Ottobre 2015
LINGUAGGIO COMUNE AGLI SPAZI CARTESIANI E A QUELLI DI FUNZIONI
SPAZI METRICI, NORMATI E PRODOTTI SCALARI

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.

ESERCIZIO n. 1 Si trovi la minima distanza del punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dai punti del grafico (t, t^2), $t \in \mathbf{R}$ rispettivamente rispetto: alla norma euclidea (cfr. es. 20 I folgio), alla norma l^1, alla norma l^∞.

ESERCIZIO n. 2 Trovare la distanza di $(0, \ldots 0) \in \mathbf{R}^d$ dall'insieme definito da
$|x_1| + \ldots |x_d| = 1$, $x \in \mathbf{R}^d$.

ESERCIZIO n. 3 La funzione $\dfrac{1}{(t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{3}{2}})|t-1|^{\frac{2}{3}}}$ ha (semi-)norma $L^2(0; +\infty)$ finita?

ESERCIZIO n. 4 Trovare una funzione assolutamente integrabile in $(0; +\infty)$ ma con (semi-)norma $L^2(0; +\infty)$ infinita [usare funzioni costanti a tratti].

ESERCIZIO n. 5 Trovare una funzione $y = f(x)$ con (semi-)norma $L^2(0; +\infty)$ finita, e con infiniti asintoti verticali $x = t_n$, $n \in \mathbf{N}$, e $t_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ [La si cerchi non negativa e continua negli intervalli $(t_n; t_{n+1})$].

ESERCIZIO n. 6 Trovare le distanze indotte dal prodotto scalare di $L^2(-\pi; \pi)$ tra la funzione $f(t) = t$ e, rispettivamente, le funzioni $\varphi_n(t) = \cos nt$, $\psi_n(t) = \sin nt$.

ESERCIZIO n. 7 a) Trovare la minima distanza rispetto alla norma uniforme su $[-\pi; \pi]$ della funzione $f(t) = \sin t$ dalle funzioni costanti.

b) Trovare la minima distanza della funzione $f(t) = t^2$ dall'insieme delle funzioni costanti, rispetto sia alla distanza $L^1(-\pi; \pi)$, che a quella uniforme su $[-\pi; \pi]$.

ESERCIZIO n.8 a) Trovare la minima distanza $L^2(-\pi; \pi)$ della fnzione $f(t) = t^2$ dalle funzioni $g(t) = at + b$, al variare di $a,\ b$ in $\mathbf{R}$.

ESERCIZIO n. 9 [L^2 con densità] a) Sia f una funzione assolutamente integrabile in senso improprio (alla Riemann)su $(0; 1)$. Si mostri che $\mathcal{B}(\varphi, \psi) = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)f(t)dt$ è ben definito ed è un prodotto scalare degenere sullo spazio vettoriale delle funzioni $C([0; 1])$.

b) Si mostri con un esempio che può esser degenere.

c) Si trovi una condizione sufficiente sulla densità f per cui sia non degenere.

ESERCIZIO n.10 Si mostri che il rapporto tra la norma $f \mapsto \max|f|$ e $f \mapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ non può essere limitato al variare di f.

ESERCIZIO n. 11 Siano $d : X \times X \to \mathbf{R}^+$, $\rho : X \times X \to R^+$, $\delta : Y \times Y \to \mathbf{R}^+$, distanze sull'insieme X e sull'insieme Y. Si discuta quale delle seguenti funzioni è ancora una distanza.

$d_1(a,b) = \frac{d(a,b)}{1+d(a,b)}$; • $d_2(a,b) = \operatorname{artan}(d(a,b))$; $d_3(a,b) = \min\{d(a,b),1\}$;

$d_4((a,\alpha),(b,\beta)) = \max\{d(a,b);\delta(\alpha,\beta)\}$; $d_5((a,\alpha),(b,\beta)) = (d(a,b)^2 + \delta(\alpha,\beta)^2)^{\frac{1}{2}}$;

•$d_6(a,b) = \Psi(d(a,b))$, Ψ concava, non negativa, nulla in 0 ; $d_7(a,b) = \chi_{]0;+\infty[}(d(a,b))$.

(Con χ_A si indica la funzione che vale 1 su A e 0 sul complementare di A.)

ESERCIZIO n.12 Siano V e W due spazi normati con norme $|\cdot|_V$ e $|\cdot|_W$. Data una funzione lineare $L : V \to W$ si definisce: $\|L\| =_{def} \sup_{v \in V\setminus(0)} \frac{|Lv|_W}{|v|_V}$.

a- Si Provi che se V e W hanno dimensione finita allora $\|A\|$ è sempre finito.

b- Si provino comunque le seguenti eguaglianze

$$\|L\| = \sup_{|v|_V=1} |Lv|_W = \sup_{0<|v|_V\leq 1} \frac{|Lv|_W}{|v|_V} = \sup_{0<|v|_V\leq 1} |Lv|_W.$$

c- Quindi si provi che le funzioni lineari L da V in W per cui $\|L\|$ è finita formano uno spazio vettoriale, e che $\|\cdot\|$ è una norma su tale spazio.

ESERCIZIO n.13 Si calcolino le norme, definite nel precedente esercizio, delle seguenti funzioni lineari:

$$L(x,y) = ax + by \ ; \quad L(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ ; \quad x \in \mathbf{R}^n \mapsto Ax \in \mathbf{R}^n, \ {}^tAA = I \ ;$$

$$L(f) = \int_0^1 f(y)dy \in \mathbf{R} = W, \ f \in C([0;1]) = V, |f|_C = \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \ ;$$

$$L(f) = \int_0^x f(y)dy \in C([0;1]) = W, f \in C([0;1]) = V = W, \ |f|_C = \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)|.$$

ESERCIZIO n.14 a- Se A è una matrice $n \times n$ si provi, con la notazione dei precedenti esercizi, che $\|A\|^2 = \|{}^tAA\|$. Si mostri che non sempre $\|A\|^2 = \|A^2\|$.

b-Se si identifica una matrice $n \times n$ con un vettore di $\mathbf{R}^{n^2}$ sussiste qualche diseguaglianza tra $\|A\|$ l'usuale norma euclidea $|A|_{n^2}$, indipendentemente da A?
