Analisi Matematica II, Anno Accademico 2015-2016.

Ingegneria Cvile Ambientale Edile

Paolo Acquistapace, Nicola Cavallucci,
Stefano Gioffrè , Roberta Marziani, Vincenzo M. Tortorelli

CONTINUAZIONE DEL FOGLIO n. 2: dalle prove in itinere.

ESERCIZIO n.15 (Es.3 Prova di autovalutazione 15-12-14) Si calcoli al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ la minima distanza $\mathbf{D}$ rispetto alla seminorma $L^2(-\pi;\pi)$ della funzione $f(x) = \cos x$ dalle funzioni $g_\alpha(x) = \alpha \cdot x$.

ESERCIZIO n. 16 (Es.2 Prima Itinere 26-2-15) Si calcoli, al variare di α, $\beta \in \mathbf{R}$, la minima distanza $\mathbf{D}$, rispetto alla seminorma $L^2(-\pi;\pi)$, della funzione $f(x) = x$ dalle funzioni $g_{\alpha,\beta}(x) = \alpha + \beta \cos x$.

FOGLIO DI ESERCIZI n. 3, dal 7 Ottobre al 14 Ottobre 2015
LIMITI E CONTINUIÀ
NEGLI SPAZI CARTESIANI

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.

ESERCIZIO 1 (Es. 1(a), II parte, 3 appello 20/7/15) Si studi l'intersezione dei grafici delle due funzioni

$$u(x,y) = x + y^2, \qquad v(x,y) = 2x^2 + 2y^4,$$

mettendo in risalto: se tale intersezione è limitata in $\mathbf{R}^3$, e se esistono punti nell'intorno dei quali essa non è sostegno di una curva regolare.

ESERCIZIO n. 2 (Es.3 Prima Itinere 26-2-15) Calcolare, nel caso esista : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2}$.

ESERCIZIO n. 3 (Es.4 Prima Itinere 26-2-15) Calcolare, nel caso esista: $\displaystyle\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ 2x^2\geq y\geq x^2}} xy - x^2 + y^2$
.

• ESERCIZIO n. 4 (Es.2 Prova di autovalutazione 15-12-14) Per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|y|^\alpha - x^2}}{x^2+y^2}$. .

• ESERCIZIO n. 5 (Es.4 Prova di autovalutazione 15-12-14) Per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|^\alpha + |y|^{2\alpha}}$.

• ESERCIZIO n. 6 Tra le seguenti implicazioni si provino quelle valide e si trovi un controesempio per ognuna di quelle false:

1. $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \implies \exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$.

2. $\exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \implies \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

3. $\begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lambda_1 \\ \exists \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\lambda_2 \\ \exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lambda_3 \end{cases} \implies \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3.$

ESERCIZIO n. 7 Si studi l'esistenza dei limiti nei domini delle seguenti funzioni, al variare di eventuali parametri, e quando possibile se ne calcoli il valore:

$$\frac{xy}{x^2+y^2};\ \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2};\ x^2\log(x^2+y^2);\ \frac{x\sin y}{y\sin x};\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^4};\ \frac{\sin(x|y|)}{x^2+|y|};\ \frac{e^{x^2y}-x\sin(xy)-1}{(x^2+y^2)^2}\ :\ (x,y)\to(0,0);$$

$$\frac{x+y}{3x+2y};\ \frac{x^3+y^2}{x^2y^2};\ \frac{x^3+y^2}{x^3+y^3};\ \frac{y^2+x+y}{x^2+x+y};\ \bullet\ \frac{x^2y^2}{|x|^\alpha+|y|^\alpha}\ :\ (x,y)\to(0,0)\ ;$$

$$\frac{y}{x^2-y}\ :\ (x,y)\to(0,0);\ \frac{y}{x^2-y}\ :\ (x,y)\underset{|y|\le|x|}{\to}(0,0);$$

$$x-y^2\ :\ x^2+y^2\to\infty;\ x-y^2\ :\ x^2+y^2\underset{2y^2\le x}{\to}\infty\ ;\ \frac{x^2+y}{x^2+y^2+2xy}\ :\ x^2+y^2\to\infty;$$

$$\frac{x^2y+x^2z+y^2z}{x^2+y^2+z^2};\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2};\frac{x^2+y^2+z^2}{x^4+y^4+z^4};x^4+y^4-xyz-z^2y;x^4+y^4+z^4-xyz:$$
$$x^2+y^2+z^2\to+\infty;$$

$$\frac{\log xy}{(x-1)^2+(y-1)^2}:(x,y)\to(1,1);$$

$$\bullet\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^4},\ \bullet\ \frac{x^\alpha+y^\beta}{x^2+y^4}\ :\ (x,y)\to(0,0),\ \ \alpha,\ \beta>0.$$

ESERCIZIO n. 8 Si studi la continuità delle seguenti funzioni:

$$\bullet f(x,y)=\int_0^y g(t,x)dt,\ g\in\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2);$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};\quad f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2}{x^3}e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases};\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy-\sin xy}{x^6+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

ESERCIZIO n. 9 Si dica se la seguenti funzioni assumono valore massimo o assumono valore minimo sui domini rispettivamente specificati:

a- $f(x,y) = \int_{\sqrt{\log(1+y^4)}}^{x^2} e^{t^2} dt \ , \quad D = \{|x|, |y| \leq 1\}$

b- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+4y^2} + x \ , & xy > 0 \\ \\ xy + x \ , & xy \leq 0 \end{cases} \ , \ D = \{0 \leq y \leq 1, \ y^2 - 1 \leq x \leq 1\}.$

• c- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \ \ D = \{(z+1)^2 - y^2 - (x+3)^2 = 0, \ z^2 + y^2 - (x+1)^2 = 0\}$