Analisi Matematica II, Anno Accademico 2015-2016.

Ingegneria Cvile Ambientale Edile

Paolo Acquistapace, Nicola Cavallucci,
Stefano Gioffrè , Roberta Marziani, Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI 4, dal 7 Ottobre al 14 Ottobre 2015
LIMITI E CONTINUITÀ IN GENERALE E
CONVERGENZE NEI PRINCIPALI SPAZI DI FUNZIONI
primo semestre: prima parte.

ESERCIZIO 1 (Es. 8 Test di ingresso Ottobre 2104) Si calcoli il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum z^{(n^2)} 2^n$.

ESERCIZIO 2 (Es.2 Prova di autovalutazione 15-12-14) Sia $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $n \in \mathbf{N}$, $x \geq 0$:
a) si calcoli $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) =: f(x)$ b) la convergenza è uniforme ?

ESERCIZIO 3 (Es.1 Seconda Itinere 7-5-15) Calcolare:
(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+t}\, \chi_{[n^2,n^3]}(t)$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{n}{n+t}\, dt$.

ESERCIZIO 4 (Es.2 , 1 appello 20/7/15) (a) La serie di funzioni $\sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right]^n$ converge uniformemente nella semiretta $[1; +\infty[$? (b) La serie converge in $L^1(]1; +\infty[\,)$?

ESERCIZIO 5 (Es.2 , 2 appello 2/7/15) Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{n}{nx+x^2}\, dx$.

ESERCIZIO 6 (Es.2GG , 2 appello 2/7/15)
a) Calcolare il limite puntuale della successione $\dfrac{n}{nx+x^2}$, $x > 0$
b) Per quali $a > 0$ si ha convergenza uniforme in $[a; +\infty[$

ESERCIZIO 7 (Es.2 , 3 appello 20/7/15) Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = e^{-(x^n)}$, $x \geq 0$.
(a) Per quali $a \geq 0$ la successione converge uniformemente in $[0; a]$?
(b) Per quali $a \geq 0$ la successione converge in $L^1(a; +\infty)$?

ESERCIZIO 8(Es.2 GG, 3 appello 20/7/15) Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{1}{1\,+\,x^n}$, $x \geq 0$.
(a) Per quali $a \geq 0$ la successione converge uniformemente in $[0; a]$?
(b) Per quali $a \geq 0$ la successione converge uniformemente in $[a; +\infty[$?

• ESERCIZIO 9 (Es.1 IIparte, Prova di autovalutazione 15-12-14)Sia $f_n(x,y) = \dfrac{2^n(x+y)}{1+2^n(x^2+y^2)}$, $n \in \mathbf{N}$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

a) Si calcoli il limite puntuale $f(x,y)$ di $f_n(x,y)$ per $n \to +\infty$.

b) Dato $r > 0$ si provi che f_n converge uniformemente a f su $\{(x,y) : x^2+y^2 \geq r^2\}$.

c) Si mostri che la convergenza non è uniforme in $\mathbf{R}^2$.

• ESERCIZIO 10 Studiare la continuità delle seguenti funzioni tra spazi normati:
a) $Id : (C^1[0;1], \int|f| + \int|f'|) \to (C[0;1], \sup|f|)$
b)$P : (C[0;1], \int|f|) \to (C[0;1], \sup|f|)$, ove Pf è la funzione $x \mapsto \int_0^x f^2(s)ds$.
c) $Id : (C[0;1], \sup|f|) \to (C[0;1], \int|f|)$,
d) $Id : (C[0;1], \int|f|) \to (C[0;1], \sup|f|)$
e) $Id : (C[0;1], \int|f|) \to \left(C[0;1], \sqrt{\int|f|^2}\right)$
f) $\frac{d}{dx} : (C^1[0;1], \sup|f|) \to (C[0;1], \int|f|)$
g) $\frac{d}{dx} : (C^1[0;1], \int|f| + \int|f'|) \to (C[0;1], \sup|f|)$

ESERCIZIO 11 (Criterio di CONVERGENZA TOTALE) Sia $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ una successione in uno spazio di Banach $(F, \|\cdot\|)$. Si mostri che se

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \|f_n\| < +\infty$$

allora la successione $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ converge nello spazio di Banach $(F, \|\cdot\|)$.

ESERCIZIO 12 Si dica per quali $x \in \mathbf{R}$ quali le seguenti successioni convergono puntualmente, e su quali intervalli convergono uniformemente come successioni di funzioni:

$$x^n \; ; \quad nx^n \; ; \quad \frac{1}{1+x^{2n}}; \; \frac{n^2}{1+x^{2n}}; \; \frac{1}{1+(x-n)^2} \; ; \quad \min\{n; \frac{1}{x^2}\} \; ; \quad \frac{(1+x^2)^{n+1}-1}{(1+x^2)^n} \; ; \quad \frac{1}{x^n+nx} \; ;$$

$$\sin\frac{x}{n}; \; \sin\frac{x^n}{1+x^{2n}} \; ; \; n^2xe^{-nx} \; ; \quad n^{\sqrt{x}}e^{-\frac{n}{x}} \; ; \quad e^{-n(e^{-nx})} \; ; \quad x^{\sqrt{n}}e^{-\frac{x}{n}} \; ; \quad |n+x|^{n+x} \; ; \quad e^{-nx}\log nx \; ;$$

$$(\sin x)^n \; ; \; \left(\frac{1}{n} + \sin^2 x\right)^n \; ; \; \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2}dy \, .$$

ESERCIZIO 13 Si provi che la successione di funzioni: $f_n(x) = (\sin(nx))^{2n}$, $x \in [0; 2\pi]$, non converge in tutti i punti del dominio. Si studi la convergenza verso zero delle successioni numeriche date dai seguenti integrali: $\int_0^{2\pi} f_n(x)dx$, $\int_0^{2\pi} nf_n(x)dx$.

---

bullet ESERCIZIO 14 Per $k \in \mathbf{N}$ si definisca $f_k(x) = \frac{1}{k}(\text{artan}(kx+k) - \text{artan}x)$, $x \in \mathbf{R}$.
a- Per quali $x \in \mathbf{R}$ la successione di numeri $(f_k(x))_{k\in\mathbf{N}}$ è convergente?
b- Su quali intervalli la successione $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente?
c- Per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie numerica $\sum_{k=0}^n f_k(x)$ converge?
d- Su quali intervalli la serie di funzioni $\sum_{k=0}^n f_k$ converge uniformemente?

ESERCIZIO 15 Si dica in quali punti $x \in \mathbf{R}$ le seguenti serie di funzioni convergono puntualmente, e in quali intervalli convergono uniformemente, totalmente:

$$\sum_n \frac{1}{1+x^n} \; ; \quad \sum_n \frac{1}{x^n+nx}, \; x>0 \; ; \quad \sum_n \frac{x^3}{1+x^{2n}} \; ; \quad \sum_n \frac{x^n}{1-x^n}; \; \sum_n \sin\frac{x}{2^n} \; ; \quad \sum_n \frac{\sin nx}{n^2}$$

$$\sum_n n(\sin x)^n; \; \sum_n \int_1^\infty e^{-xny^2}dy; \; \sum_n (\text{artan}(nx+n) - \text{artan}nx) \, ; \quad \bullet \; \sum_n \frac{1}{n+(x-n)^2}, \; x \in \mathbf{R}.$$

$$\sum_n \frac{\log(1+nx)}{nx^n} \; , \quad \sum_n \frac{a^n}{n^x} \; (a>1) \; , \quad \sum_n \frac{a^n}{n^x} \; (a<1) \; , \quad \sum_n x^{n^2}a^n \; , \quad \sum_n \frac{\log n}{n^x}$$

ESERCIZIO 16 Sia $f_n(x) = \sqrt[n]{1+|3x|^n}$. Per quali $a \geq 0$ la successione converge uniformemente nella semiretta $[a; +\infty[$?

ESERCIZIO 17 a- Si studi su quali intervalli le successioni di funzioni elencate convergono uniformemente.
b- Se ne studi anche la convergenza rispetto alle altre norme o distanze indicate.

$e^{-n(e^{-nx})}$, $\int_{-\infty}^{0} |f|$; $\left(\frac{1}{n} + \sin^2 x\right)^n$, $\int_0^{2\pi} |f|$;

$e^{-nx} \log nx$, $\int_0^{+\infty} |f|$; $\sin \frac{x^n}{1+x^{2n}}$, $\int |f|$.

ESERCIZIO 18 Sia $f_n(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xny^2}\, dy$, per $x > 0,\ n \geq 1$.
a) Fissato $\varepsilon > 0$ mostrare che f_n converge uniformemente a 0 in $[\varepsilon; +\infty[$.
b) Studiare la convergenza uniforme in $]0; +\infty[$.
c) Studiare la convergenza in $L^1(0; +\infty)$.

• ESERCIZIO 19 a- Si studi la convergenza puntuale delle successioni elencate.
b- Se ne studi anche la convergenza uniforme per $n \to +\infty$ su: i domini di definizione, sulle palle aperte, chiuse e sui loro complementari.

$$\frac{2^n(x+y)}{1+n2^n(x^2+y^2)}\ ; \quad \sum_{k=1}^{n} e^{k(\mathcal{R}ez - \frac{z}{2}+1)}\ z \in \mathbf{C}\ ; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{|x-y|^k}{k!} \log(k+x^2+y^2)$$

$$f_n(x,y) = \frac{1}{x^n + y^n + ny},\ x, y > 0\ , \quad S_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x,y)\ , \quad \sum_n \sup f_n$$

• ESERCIZIO 20 Per quali $x \in \mathbf{R}$ la successione numerica : $f_n(x) = \dfrac{n^2 \sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1+n^2\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}$ converge? Su quali intervalli la successione di funzioni f_n converge uniformemente?

• ESERCIZIO 21 Per $n \in \mathbf{N}$ si definisca:

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{x^3(\cos x)^n}{1-\cos x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

a- Per quali $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ la successione numerica $(g_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge ? E la serie $\sum_n g_n(x)$?
b- La successione di funzioni converge in norma L^1? In norma L^2?
c- Su quali intervalli contenuti in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ la successione di funzioni $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente? E la serie di funzioni $\sum_n g_n$?

ESERCIZIO 22 Dopo aver giustificato che le integrande sono integrabili si calcolino gli integrali giustificando la risposta: $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 3} \left(\sum_n ne^{-nx}\right) dx$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\sum_n \frac{1}{4^n + x^2}\right) dx$.

• ESERCIZIO 23 Si studi la convergenza puntuale ed uniforme sui sottoinsiemi dei domini specificati delle successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, e detto f il limite si studi la convergenza puntuale ed uniforme e totale della serie $\sum_n (f_n - f)$:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1 \ , \quad x \in [0;1] \\ \\ f_{n+1}(x) \ = \ \sqrt{x f_n(x)} \end{cases} \qquad \begin{cases} f_0(x) = \cos x \ , \quad x \in \mathbf{R} \\ \\ f_{n+1}(x) \ = \ \cos\left(f_n(x)\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} f_0(x) \ , \quad x \in [0;A] \\ \\ f_{n+1}(x) \ = \ \int_0^x f_n(y) dy \end{cases}$$
