Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

11 giugno 2015 - primo appello - gruppo A, prima parte (un'ora)

N. MATR./ANNO ISCR.		COGNOME	
DOCENTE/ CREDITI		NOME	

Istruzioni al fine della valutazione: *compilate l'intestazione in stampatello.*
Rispondete solo ai quesiti relativi ai rispettivi programmi: chi fa l'esame da 6 crediti risponderà solo ai quesiti contrassegnati con 6; chi ha il programma di Georgiev e Galatolo, o di De Pascale, risponderà solo ai quesiti contrassegnati con GG o D. Inoltre, chi ha il programma da 9 o 12 crediti, risponderà solo ai quesiti contrassegnati con 9 o 12.
Scrivete *solo le risposte* su questo foglio, *l'unico* da restituire; *ricopiate a parte*, se volete, le vostre risposte.

Esercizio 1 [9,12,GG] Sia $z \in \mathbb{R}^3$ e sia C una matrice 3×3, a coefficienti reali, invertibile. Determinare in funzione di z e C un elemento $u \in \mathbb{R}^3$ tale che si abbia, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^3$,
$\langle u \cdot [Cx \times Cy] \rangle = \langle z \cdot [x \times y] \rangle$. **u** =

Esercizio 2 (a) [9,12,GG] La serie di funzioni $\sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right]^n$ converge uniformemente nella semiretta $[1; +\infty[$? **(a)**
(b) [9,12] La serie converge in $L^1(]1; +\infty[)$? **(b)**

Esercizio 3 [6,9,12,GG,D] Calcolare il differenziale di $f(x,y) = \begin{cases} (x^2)^{y^2+1} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$
nel punto $(0,0)$. **df(0,0)=**

Esercizio 4 [9,12,GG] Sia $f(x,y,z) = e^{xyz} - z\log(1 + x^2y^2)$.
(a) calcolare $\frac{\partial^6 f}{\partial x^2\,\partial y^2\,\partial z^2}(0,0,0)$. **(a)**
(b) Detta $z = z(x,y)$ la funzione definita dall'equazione $f(x,y,z) = 1$ intorno al punto $(1,1,0)$, calcolare $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$. **(b)**

Esercizio 5 [6,9,12,GG,D] Si determinino il valore massimo $\mathbf{V_M}$ e il valore minimo $\mathbf{V_m}$ per la funzione $f(x,y,z) = xz - zy$ sul vincolo dato dall'equazione $xy + x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
$\mathbf{V_M} =$ $\mathbf{V_m} =$

Esercizio 6 [6,9,12,GG,D] Calcolare l'integrale $I = \int_{0<x^2+y^2<z<1} e^{z-x^2-y^2}\,dxdydz$. **I** =

Esercizio 7 [6,9,12,GG,D] Calcolare l'area A della superficie costituita dai segmenti di estremi $(0,0,0)$ e $(t\cos t, t\sin t, t)$, con $0 \leq t \leq 1$. **A** =

Esercizio 8 [6,9,12,GG,D] Si consideri la 2-varietà $S = \{(x,y,z) : 1 \leq z \leq 2,\ z = \sqrt{x^2+y^2}\}$, con orientazione tale che il vettore normale nel suo punto $P = (1,1,\sqrt{2})$ sia $(-1,-1,\sqrt{2})$. Disegnare in figura sopra bS (bordo di S) l'orientazione coerente con quella di S.

Esercizio 9 [12,GG] Determinare $a > 0$ tale che i coefficienti di Fourier su $[-\pi; \pi]$ della funzione $f(x) = x^2$ siano infinitesimi per $n \to \infty$ di ordine $1/n^a$. **a** =

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale
Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli
11 giugno 2015 - primo appello - gruppo A, seconda parte (due ore)

N. MATR./ANNO ISCR.		COGNOME	
DOCENTE/ CREDITI		NOME	

Istruzioni al fine della valutazione: *compilare l'intestazione in stampatello.*
Si risolva almeno un esercizio, in tutti i punti, *riportando con ordine* lo svolgimento della soluzione e *motivandolo accuratamente.*

Esercizio 1 (a) Fissato $p > 0$, si calcolino il valore minimo e il valore massimo della funzione $f(x, y) = |x|^p + |y|^p$ sul vincolo determinato dall'equazione $x^2 + y^2 = 1$.
(b) Stabilire se la funzione $\frac{1}{x^2+y^2}$ è sommabile sull'insieme E delimitato dalle due spirali

$$S_1 = \left\{(x, y) = \frac{1}{t}(\cos t, \sin t),\ t \geq \pi\right\}, \qquad S_2 = \left\{(x, y) = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)(\cos t, \sin t),\ t \geq \pi\right\}.$$

(c) Stabilire per quali $p > 2$ e $\gamma > 1$ la funzione $\frac{1}{|x|^p+|y|^p}$ è sommabile sull'insieme F delimitato dalle due spirali

$$S_1 = \left\{(x, y) = \frac{1}{t}(\cos t, \sin t),\ t \geq \pi\right\}, \qquad S_3 = \left\{(x, y) = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{t^\gamma}\right)(\cos t, \sin t),\ t \geq \pi\right\}.$$

Esercizio 2 (a) Sia $S = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^3 e^{-xy} = 8,\ z \geq 0\}$. Si mostri che S è una 2-varietà con bordo e se ne determini il bordo bS.
(b) Si calcoli la divergenza del campo vettoriale $F(x, y, z) = e^z(-xy^2, -x^2y, x^2 + y^2)$.
(c) Si orienti S in modo che nel suo punto $(0, 0, 2)$ il versore normale sia $(0, 0, 1)$, e si calcoli il flusso del campo F attraverso la superficie S così orientata.
(d) Si dimostri, usando la teoria nota, che l'intersezione Γ tra S e il cilindro $C = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 = 2,\ z \in \mathbb{R}\}$ è sostegno di una curva regolare. Si calcoli il lavoro di $e^{-z}F$ lungo la curva Γ, orientata coerentemente con l'orientazione della porzione di S che si proietta sulla base $\{(x, y, 0) :\ x^2 + y^2 = 2\}$ del cilindro.

Risoluzione - prima parte

Esercizio 1 Si ha per ogni $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\langle u \cdot [Cx \times Cy]\rangle &= \det(u|Cx|Cy) = \det\big(CC^{-1}u|Cx|Cy\big) = \det\big[C\,\big(C^{-1}u|x|y\big)\big] = \\ &= \det C \det\big(C^{-1}u|x|y\big) = (\det C)\langle C^{-1}u \cdot [x \times y]\rangle,\end{aligned}$$

e dunque deve essere $z = (\det C)C^{-1}u$, ossia $u = \frac{1}{\det C}\, Cz$.

Esercizio 2 **(a)** Si tratta di una serie geometrica che converge puntualmente alla funzione

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right]^n - 1 - \frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{1}{[1+\sqrt{x}]^2} = \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{1+\sqrt{x}}} - 1 - \frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{1}{[1+\sqrt{x}]^2} = \frac{1}{\sqrt{x}[1+\sqrt{x}]^2};\end{aligned}$$

notiamo fin d'ora che questa funzione è sommabile in $]1,\infty[$. La convergenza è anche uniforme perché

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{x\geq 1}\left|\sum_{n=3}^{N}\left[\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right]^n - f(x)\right| = \lim_{N\to\infty}\sup_{x\geq 1}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\left[\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right]^n\right| \leq \lim_{N\to\infty}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\right]^n\right| = 0.$$

Si noti che la convergenza è non solo uniforme, ma anche totale in $L^\infty(1,\infty)$.

(b) Per il teorema di B. Levi,

$$\sum_{n=3}^{\infty}\int_1^{\infty}\left[\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right]^n dx = \int_1^{\infty}\sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right]^n dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}[1+\sqrt{x}]^2}\,dx < \infty;$$

quindi c'è convergenza totale in $L^1(1,\infty)$. Ne segue la tesi.

Esercizio 3 Poiché, per $x^2+y^2 \to 0$,

$$|f(x,y)| = x^2 e^{y^2 \ln x^2} \leq x^2 = \mathrm{o}(\sqrt{x^2+y^2}),$$

si ha $df(0,0) = (0,0)$.

Esercizio 4 **(a)** Poiché per $(x,y,z) \to (0,0,0)$ si ha

$$\begin{aligned}&e^{xyz} = 1 + xyz + \tfrac{x^2y^2z^2}{2} + \mathrm{o}([\sqrt{x^2+y^2}]^6),\\ &z\log(1+x^2y^2) = zx^2y^2 + \mathrm{o}([\sqrt{x^2+y^2}]^8),\end{aligned}$$

si ottiene per $(x,y,z) \to (0,0,0)$

$$f(x,y,z) = 1 + xyz - zx^2y^2 + \frac{x^2y^2z^2}{2} + \mathrm{o}([\sqrt{x^2+y^2}]^6);$$

in particolare il polinomio di Taylor di f di grado 6 nell'origine è

$$P_6(x,y,z) = 1 + xyz - zx^2y^2 + \frac{1}{2}\,x^2y^2z^2,$$

cosicché
$$\frac{1}{2!\,2!\,2!}\,\frac{\partial^6 f}{\partial x^2\,\partial y^2\,\partial z^2}(0,0,0)=\frac{1}{2},$$
ossia
$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^2\,\partial y^2\,\partial z^2}(0,0,0)=4.$$

(b) La funzione implicita $z(x,y)$ verifica, per il teorema del Dini,
$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-\frac{f_x(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))}=-\frac{yz\,e^{xyz}+\frac{2zx}{1+x^2y^2}}{xy\,e^{xyz}-\log(1+x^2y^2)},$$
e nel punto $(1,1)$, essendo $z(1,1)=0$, si ha
$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=0.$$

Esercizio 5 Si tratta di un problema di minimo e massimo vincolato con funzioni omogenee di grado 2. Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dobbiamo annullare il gradiente di $f-\lambda g$, ottenendo in questo caso il sistema
$$\begin{cases} z-\lambda y-2\lambda x=0\\ -z-\lambda x-2\lambda y=0\\ x-y-2\lambda z=0\\ xy+x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$$
In particolare, dalle prime tre equazioni si ha
$$\langle (x,y,z)\cdot[\nabla f(x,y,z)-\lambda\nabla g(x,y,z)]\rangle_3=0,$$
e in virtù del teorema di Eulero per le funzioni omogenee, nonché della quarta equazione,
$$2f(x,y,z)-2\lambda g(x,y,z)=2f(x,y,z)-2\lambda=0.$$
Quindi, in ciascun punto stazionario (x,y,z,λ), λ è il valore assunto da f nel punto. Per trovare λ, riscriviamo le prime tre equazioni, che sono lineari, in forma matriciale:
$$\begin{pmatrix} -2\lambda & -\lambda & 1\\ -\lambda & -2\lambda & -1\\ 1 & -1 & -2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$
e osserviamo che cerchiamo soluzioni (x,y,z) diverse da $(0,0,0)$, poiché $(0,0,0)$ non appartiene al vincolo. Quindi dobbiamo imporre che
$$\det\begin{pmatrix} -2\lambda & -\lambda & 1\\ -\lambda & -2\lambda & -1\\ 1 & -1 & -2\lambda \end{pmatrix}=6\lambda(1-\lambda^2)=0,$$
il che ci fornisce $\lambda=1$, $\lambda=-1$ e $\lambda=0$. A noi interessano i valori massimo e minimo di λ, e quindi si conclude che
$$V_m=-1,\qquad V_M=1.$$

Esercizio 6 L'insieme di integrazione T si descrive come

$$T = \{(x,y,z): \ x^2+y^2<1, \ x^2+y^2<z<1\};$$

Usando le coordinate cilindriche si ha, con facili calcoli,

$$\begin{aligned}\int_T e^{z-x^2-y^2}\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 e^{z-r^2} r\,dzdrd\vartheta = \\ &= 2\pi\int_0^1 r\left[e^{z-r^2}\right]_{r^2}^1 dr = 2\pi\int_0^1 r(e^{1-r^2}-1)dr = \pi(e-2).\end{aligned}$$

Esercizio 7 La superficie S proposta si descrive così:

$$\begin{cases} x = s\,t\,\cos t \\ y = s\,t\,\sin t \\ z = s\,t, \end{cases} \qquad s\in[0,1], \ t\in[0,1].$$

Detta σ questa applicazione, si ha

$$D\sigma = \begin{pmatrix} t\,\cos t & s\,\cos t - s\,t\,\sin t \\ t\,\sin t & s\,\sin t + s\,t\,\cos t \\ t & s \end{pmatrix},$$

da cui

$$E = |\sigma_s|^2 = 2t^2, \qquad G = |\sigma_t|^2 = s^2(t^2+2), \qquad F = \langle \sigma_s\,,\sigma_t\rangle = st.$$

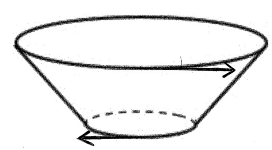
Perciò l'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{2t^2s^2(t^2+2)-s^2t^2} = s\,t\sqrt{3+2t^2}\,dsdt.$$

Dunque

$$\begin{aligned} a(S) &= \int_0^1\int_0^1 s\,t\sqrt{3+2t^2}\,dsdt = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 t\sqrt{3+2t^2}\,dt = \frac{1}{8}\int_0^2 \sqrt{3+u}\,du = \frac{1}{12}(5^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}}).\end{aligned}$$

Esercizio 8 Le orientazioni corrette sono disegnate qui a fianco.



Esercizio 9 I coefficienti di Fourier di f relativi ai seni sono nulli, essendo f pari. Per quelli dei coseni, si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\left[x^2\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \\ &= 0 + \frac{4}{\pi n^2}\left[x\cos nx\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{4}{\pi n^2}\left[x\cos nx\right]_0^{\pi} + 0 = \frac{4(-1)^n}{n^2}.\end{aligned}$$

Pertanto a_n è infinitesimo per $n\to\infty$ di ordine $\frac{1}{n^2}$.

Risoluzione - seconda parte

Esercizio 1 (a) La funzione f è continua sul vincolo K assegnato, il quale è un insieme chiuso e limitato: pertanto f ha massimo e minimo su K. Per ragioni evidenti di simmetria, possiamo limitarci allo studio di f sul primo quadrante Q, definito da $x \geq 0$ e $y \geq 0$: scrivendo i punti di $K \cap Q$ come $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, dobbiamo trovare il massimo ed il minimo di

$$g(\vartheta) = (\cos\vartheta)^p + (\sin\vartheta)^p$$

per $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$.
Notiamo che se $p = 2$ la funzione f è costantemente uguale a 1 su K, quindi possiamo supporre $p \neq 2$.
Si ha $g(0) = g(\pi/2) = 1$, mentre

$$g'(\vartheta) = p(\cos\vartheta)^{p-1}(-\sin\vartheta) + p(\sin\vartheta)^{p-1}\cos\vartheta = p\sin\vartheta\cos\vartheta[(\sin\vartheta)^{p-2} - (\cos\vartheta)^{p-2}] = 0$$

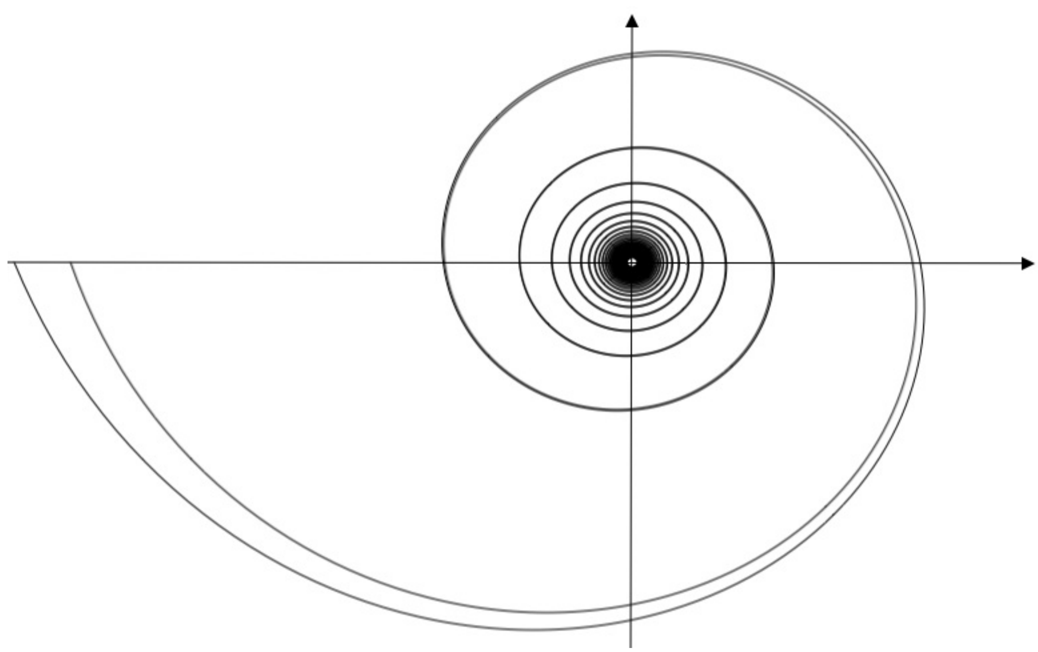
se e solo se $(\cos\vartheta)^{p-2} = (\sin\vartheta)^{p-2}$, cioè se e solo se $\cos\vartheta = \sin\vartheta$, vale a dire $\vartheta = \pi/4$. In tale punto si ha $g(\pi/4) = 2^{1-p/2}$.
In definitiva,

$$\max_K f = \max\{1, 2^{1-p/2}\}, \qquad \min_K f = \min\{1, 2^{1-p/2}\}.$$

Si può osservare che se $p > 2$ il massimo è 1, raggiunto nei quattro punti $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, ed il minimo è $2^{1-p/2}$, raggiunto nei quattro punti $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; se invece $0 < p < 1$, il massimo diventa minimo e il minimo diventa massimo, ed entrambi sono raggiunti negli stessi punti.

(b) L'insieme E, disegnato nella figura sottostante, è la regione compresa tra le due spirali S_1 e S_2. Possiamo quindi rappresentare E in coordinate polari (r, ϑ) mediante le relazioni

$$\frac{1}{\vartheta} \leq r \leq \frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^3}, \qquad \vartheta \in [\pi, \infty[\,.$$



Pertanto

$$\int_E \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_\pi^\infty \int_{\frac{1}{\vartheta}}^{\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\vartheta^3}} \frac{1}{r^2}\,r\,drd\vartheta = \int_\pi^\infty \ln\frac{\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\vartheta^3}}{\frac{1}{\vartheta}}\,d\vartheta = \int_\pi^\infty \ln\left(1+\frac{1}{\vartheta^2}\right)\,d\vartheta.$$

Poiché si ha

$$\ln\left(1+\frac{1}{\vartheta^2}\right) \simeq \frac{1}{\vartheta^2} \quad \text{per } \vartheta\to\infty,$$

si conclude che l'integrale $\int_E \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$ è finito.

(c) Come in (b), l'insieme F è delimitato dalle due spirali S_1 e S_3, e si ricava quindi, analogamente,

$$\int_F \frac{1}{|x|^p+|y|^p}\,dxdy = \int_\pi^\infty \int_{\frac{1}{\vartheta}}^{\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\vartheta^{\gamma+1}}} \frac{1}{r^p}\,r\,drd\vartheta.$$

Se $p=2$, si ottiene come in (b)

$$\int_E \frac{1}{|x|^p+|y|^p}\,dxdy = \int_\pi^\infty \ln\left(1+\frac{1}{\vartheta^\gamma}\right)\,d\vartheta,$$

e dato che $\ln\left(1+\frac{1}{\vartheta^\gamma}\right)$ si comporta come $\frac{1}{\vartheta^\gamma}$ per $\vartheta\to\infty$, si conclude che se $p=2$ l'integrale $\int_F \frac{1}{|x|^2+|y|^2}\,dxdy$ è finito se e solo se $\gamma>1$.
Se $p\neq 2$, si ha invece

$$\int_F \frac{1}{|x|^p+|y|^p}\,dxdy = \frac{1}{2-p}\int_\pi^\infty \left[\left(\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\vartheta^{\gamma+1}}\right)^{2-p} - \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{2-p}\right]d\vartheta,$$

e poiché

$$\left(\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\vartheta^{\gamma+1}}\right)^{2-p} - \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{2-p} = \frac{1}{\vartheta^{2-p}}\left[\left(1+\frac{1}{\vartheta^\gamma}\right)^{2-p}-1\right] \simeq \frac{2-p}{\vartheta^{2-p+\gamma}} \quad \text{per } \vartheta\to\infty,$$

si verifica che l'integrale $\int_F \frac{1}{|x|^p+|y|^p}\,dxdy$ è finito se e solo se

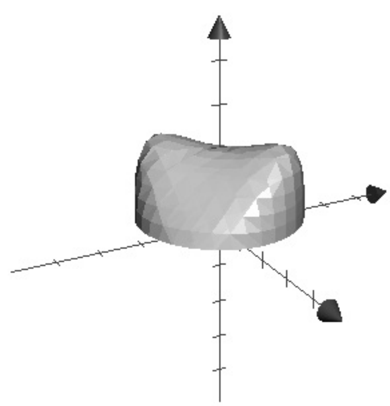
$$\int_\pi^\infty \frac{1}{\vartheta^{2-p+\gamma}}\,d\vartheta < \infty,$$

ossia se e solo se $2-p+\gamma>1$, vale a dire $\gamma>p-1$. Si noti che questo risultato si accorda con quello ottenuto nel caso $p=2$.

Esercizio 2 (a) La superficie S, disegnata qui accanto, è l'intersezione con il semispazio $z\geq 0$ della curva di livello 8 per la funzione $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^3e^{-xy}$, la quale è di classe C^∞ ed ha gradiente

$$\nabla f(x,y,z) = (2x-yz^3e^{-xy}, 2y-xz^3e^{-xy}, 3z^2e^{-xy})$$

sempre diverso da 0: infatti per $z>0$ è $f_z>0$, mentre per $z=0$ le quantità $f_x=2x$ e$f_y=2y$ non possono annullarsi simultaneamente, dato che l'origine non appartiene a S.



Si conclude che la superficie S è regolare, ossia è una 2-varietà, il cui bordo è l'intersezione di S con il piano $z = 0$, ossia la circonferenza di centro $(0, 0, 0)$ e raggio $2\sqrt{2}$ del piano xy.

(b) Si ha per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(-xy^2e^z) + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2ye^z) + \frac{\partial}{\partial z}e^z(x^2+y^2) = -y^2e^z - x^2e^z + e^z(x^2+y^2) = 0.$$

(c) Dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_S \langle F \cdot n \rangle_3 \, d\sigma,$$

ove n è il versore normale orientato in modo che la sua terza componente sia positiva. Poiché però F ha divergenza nulla, per il teorema della divergenza sarà nullo l'integrale sulla superficie chiusa costituita da S e dal disco $D = \{(x, y, z) : \ z = 0, \ x^2 + y^2 = 8\}$ orientata secondo la normale esterna n, che su D è $(0, 0, -1)$. Perciò

$$\int_S \langle F \cdot n \rangle_3 \, d\sigma = -\int_D \langle F \cdot n \rangle_3 \, d\sigma = +\int_D (x^2+y^2) \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} r^2 \, r \, dr d\vartheta = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2\sqrt{2}} = 32\pi.$$

(d) L'intersezione $\Gamma = S \cap C$ è l'intersezione di due superfici regolari, i cui rispettivi vettori normali non sono paralleli nei punti di Γ: questo è banale, perché il vettore normale a C è $\nu = (2x, 2y, 0)$, ossia ha la terza componente nulla, a differenza del vettore ∇f, normale a S. Quindi la curva Γ ha in ogni suo punto (x, y, z) vettore tangente τ dato da $\nabla f \times \nu \neq 0$. Pertanto Γ è una curva regolare.
Dobbiamo ora calcolare l'integrale

$$\int_\Gamma \langle e^{-z} F \cdot t \rangle_3 \, ds,$$

ove il versore tangente $t = \frac{\tau}{|\tau|_3}$ va orientato nel verso coerente con l'orientazione di S prescelta. Però la parametrizzazione di Γ è scomoda, mentre possiamo riportare il nostro integrale sulla parte di S che si proietta sulla base del cilindro C, parte che chiameremo Σ, utilizzando il teorema di Stokes: risulta infatti

$$\int_\Gamma \langle e^{-z} F \cdot \tau \rangle_3 \, ds = \int_\Sigma \langle \operatorname{rot}(e^{-z}F) \cdot n \rangle_3 \, d\sigma,$$

ove $n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|_3}$ e

$$\operatorname{rot}(e^{-z}F) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ D_x & D_y & D_z \\ -xy^2 & -x^2y & x^2+y^2 \end{pmatrix} = (2y, -2x, 0).$$

Notiamo anche che Σ è una superficie cartesiana, con dominio base il disco $D' = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 2\}$, e con versore normale n (coerente con t); inoltre si sa che su Σ vale $z^3e^{-xy} = 8 - x^2 - y^2$ e $d\sigma = |\nabla f|_3 dxdy$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \langle \operatorname{rot}(e^{-z}F) \cdot n \rangle_3 \, d\sigma &= \int_{D'} \langle \operatorname{rot}(e^{-z}F) \cdot \nabla f \rangle_3 \, dxdy = \\ &= \int_{D'} (4xy - 2y^2z^3e^{-xy} - 4xy + 2x^2z^3e^{-xy}) \, dxdy = \int_{D'} 2(x^2-y^2)(8-x^2-y^2) \, dxdy = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)(8-r^2) r \, dr d\vartheta = 0, \end{aligned}$$

dato che $\int_0^{2\pi}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\,d\vartheta = 0$.
A questo stesso risultato si arriva, più semplicemente, osservando che Γ è anche il bordo della superficie cilindrica formata dalla parte di C delimitata da Γ, che chiameremo C', e dal disco D'. Quindi, applicando il teorema di Stokes,

$$\int_\Gamma \langle e^{-z}F(x,y,z)\cdot\tau\rangle_3\,ds = \int_{C'\cup D'} \langle \operatorname{rot} e^{-z}F(x,y,z)\cdot n\rangle_3\,d\sigma.$$

Si noti però che su C' l'integrando è nullo perché $n = \nu = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2x, 2y, 0)$; lo stesso accade su D' essendo $n = (0, 0, -1)$. Quindi

$$\int_\Gamma \langle e^{-z}F(x,y,z)\cdot\tau\rangle_3\,ds = 0.$$