**Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015**
**Ingegneria Edile, Civile, Ambientale**
Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli
**20 luglio 2015 - terzo appello - prima parte (un'ora)**

| N. MATR./ANNO ISCR. | | COGNOME | |
|---|---|---|---|
| DOCENTE/ CREDITI | | NOME | |

**Istruzioni** al fine della valutazione:
- *compilate l'intestazione in stampatello.* Ai quesiti contrassegnati con [12] deve rispondere chi deve farsi riconoscere 12 crediti.
- scrivete *solo le risposte* su questo foglio, *l'unico* da restituire;
-*ricopiate a parte* le vostre risposte per confrontarle con quelle ufficiali.

---

**Esercizio 1** Calcolare $A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. **A =**

---

**Esercizio 2** Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = e^{-(x^n)}$, $x \geq 0$.
(a) Per quali $a \geq 0$ la successione converge uniformemente in $[0; a]$? (**a**)
(b) Per quali $a \geq 0$ la successione converge in $L^1(0; a)$? (**b**)

---

**Esercizio 3** Si consideri la funzione $z = z(x, y)$ definita implicitamente, in un intorno di $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 0)$, dall'equazione $2y + x + \cos(x + y + z) - \sin(zxy) = 1 - \sqrt{\pi}$. Se ne calcoli la derivata $\frac{\partial z}{\partial y}(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$. $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}}(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}) =$

---

**Esercizio 4** Si classifichino i punti critici della funzione $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz$.
**p.min.rel.** = , **p.max.rel.** = , **p.sella** =

---

**Esercizio 5** Calcolare l'integrale di superficie $I = \int_\Sigma (x + y + z)\, d\sigma$, ove

$$\Sigma = \{(x, y, z) : \ 0 \leq x \leq 2, \ x^2 = y^2 + z^2\}.$$ **I =**

---

**Esercizio 6** Sia data l'applicazione $\Phi_\lambda(x, y) = (x + \lambda, y + e^{\lambda y}) =: (u, v)$, e sia $B$ il disco determinato dalla disequazione $x^2 + y^2 \leq 1$. Si calcoli

$$D = \left[ \frac{d}{d\lambda} \int_{\Phi_\lambda(B)} u \, du dv \right]_{\lambda=0}.$$ **D =**

---

**Esercizio 7** Calcolare il flusso $\Phi$ del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x + \sin(y + z), \cos(x + y + z), z^2 \cos(x + y + z))$$

uscente dalla superficie $S = \{(x, y, z) : \max\{|x|, |y|, |z|\} = 1\}$. $\mathbf{\Phi} =$

---

**Esercizio 8** Calcolare il flusso $\Psi$ del campo vettoriale $G(x, y, z) = (y - x, y - z, z)$ attraverso la semisfera $\Sigma = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \geq 0\}$, orientata dal versore normale $v = (0, 0, 1)$ nel punto $P = (0, 0, 1)$. $\mathbf{\Psi} =$

---

[12] **Esercizio 9** Si calcolino i coefficienti di Fourier della funzione $3x - 5$, $x \in [-\pi; \pi]$.

$\mathbf{a}_n =$ $\mathbf{b}_n =$

**Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015**
**Ingegneria Edile, Civile, Ambientale**

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

**20 luglio 2015 - terzo appello - prima parte (un'ora)**

Studenti ex Galatolo-Georgiev.

| | | | |
|---|---|---|---|
| N. MATR./ANNO ISCR. | | COGNOME | |
| DOCENTE/ CREDITI | | NOME | |

**Istruzioni** al fine della valutazione:
- *compilate l'intestazione in stampatello*; Ai quesiti contrassegnati con [12] deve rispondere chi deve farsi riconoscere 12 crediti.
- scrivete *solo le risposte* su questo foglio, *l'unico* da restituire;
-*ricopiate a parte* le vostre risposte per confrontarle con quelle ufficiali.

---

**Esercizio 1** Calcolare l'integrale $I = \int_A xy\, dxdy$, ove

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y(x^2 + 1) \leq 1 \leq x\}. \qquad \mathbf{A} =$$

---

**Esercizio 2** Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$, $x \geq 0$.
(a) Per quali $a \geq 0$ la successione converge uniformemente in $[0; a]$? $\quad \mathbf{a} \in$
(b) Per quali $a \geq 0$ la successione converge uniformemente in $[a; +\infty[$ ? $\quad \mathbf{a} \in$

---

**Esercizio 3** Si consideri la funzione $z = z(x, y)$ definita implicitamente, in un intorno di $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 0)$, dall'equazione $2y + x + \cos(x + y + z) - \sin(zxy) = 1 - \sqrt{\pi}$. Se ne calcoli la derivata $\frac{\partial z}{\partial x}(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$. $\quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}}(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}) =$

---

**Esercizio 4** Si classifichino i punti critici della funzione $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz$.

**p.min.rel.** = , **p.max.rel.** = , **p.sella** =

---

**Esercizio 5** Calcolare l'integrale di superficie $I = \int_\Sigma (x + y + z)\, d\sigma$, ove

$$\Sigma = \{(x, y, z) : \ 0 \leq x \leq 2, \ x^2 = y^2 + z^2\}. \qquad \mathbf{I} =$$

---

**Esercizio 6** Data l'equazione differenziale $y'(x) = \sin y(x)$, se ne trovino le soluzioni stazionarie (punti fissi), asintoticamente stabili per $x \to +\infty$, comprese fra $-4$ e $5$. $\quad \mathbf{y} =$

---

**Esercizio 7** Calcolare il flusso $\Phi$ del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x + \sin(y + z), \cos(x + y + z), z^2 \cos(x + y + z))$$

uscente dalla superficie $S = \{(x, y, z) : \max\{|x|, |y|, |z|\} = 1\}$. $\quad \mathbf{\Phi} =$

---

**Esercizio 8** Calcolare il flusso $\Psi$ del campo vettoriale $G(x, y, z) = (y - x, y - z, z)$ attraverso la semisfera $\Sigma = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \geq 0\}$, orientata dal versore normale $v = (0, 0, 1)$ nel punto $P = (0, 0, 1)$. $\quad \mathbf{\Psi} =$

---

[12]**Esercizio 9** Si calcolino i coefficienti di Fourier della funzione $3x - 5$, $x \in [-\pi; \pi]$.

$\mathbf{a}_n =$ $\qquad \mathbf{b}_n =$

**Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015**
**Ingegneria Edile, Civile, Ambientale**

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

**20 luglio 2015 - terzo appello - seconda parte (due ore)**

| N. MATR./ANNO ISCR. | | COGNOME | |
|---|---|---|---|
| DOCENTE/ CREDITI | | NOME | |

**Istruzioni** al fine della valutazione: *compilare l'intestazione in stampatello.*
Si risolva almeno un esercizio, in tutti i punti, *riportando con ordine* lo svolgimento della soluzione e *motivandolo accuratamente.*

---

**Esercizio 1** (a) Si analizzi l'intersezione dei grafici delle due funzioni

$$u(x,y) = x + y^2, \qquad v(x,y) = 2x^2 + 2y^4,$$

mettendo in risalto: se tale intersezione è limitata in $\mathbb{R}^3$, e se esistono punti nell'intorno dei quali essa non è sostegno di una curva regolare.
(b) Si disegnino in modo approssimativo ma esauriente gli insiemi di livello delle funzioni $u$ e $v$ sopra definite.
(c) Si individui sotto forma di luogo di zeri l'insieme dei punti del piano ove gli uni sono tangenti agli altri.

---

**Esercizio 2** Siano date due funzioni reali $u \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e $v \in C^2(\mathbb{R}^3)$.
(a) Si consideri il campo $W(x,y,z) = (y,-x,1)+u(x,y,z)\nabla v(x,y,z)$. Si mostri che $\operatorname{rot} W \equiv 0$ se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2. \end{cases}$$

(b) Nel caso in cui $W = \nabla w$ per qualche potenziale $w \in C^2(\mathbb{R}^3)$, si provi che la mappa $\Psi(x,y,z) = (u,v,w)$ da $\mathbb{R}^3$ in sé è localmente invertibile in ogni punto di $\mathbb{R}^3$.

---

**Risoluzione - prima parte A. A. 2014-15**

**Esercizio 1** Per la formula di Cauchy-Binet, dati $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$, scritti come vettori colonna, si ha:

$$\langle (A \times B), (C \times D) \rangle = \det[{}^t(A|B)\,(C|D)].$$

Nel nostro caso, quindi,

$$\det \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 8.$$

**Esercizio 2 (a)** Analizziamo anzitutto la convergenza puntuale. Fissato $x \geq 0$, vi sono tre casi: $x < 1$, $x = 1$ e $x > 1$. Nel primo caso si ha $x^n \to 0$ e quindi $f_n(x) \to 1$ per $n \to \infty$; nel secondo caso è $x^n = 1$ e $f_n(x) = e^{-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; nel terzo caso risulta $x^n \to +\infty$ e pertanto $f_n(x) \to 0$ per $n \to \infty$. Dunque

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ e^{-1} & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Per la convergenza uniforme in $[0; a]$, notiamo che se $a < 1$ si ha

$$\sup_{x\in[0;a]} |f_n(x) - 1| = \sup_{x\in[0;a]} (1 - e^{-(x^n)}) = 1 - e^{-(a^n)} \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty,$$

quindi $f_n$ converge uniformemente a 1 in $[0; a]$ per ogni $a \in ]0; 1[$.
Invece se $a \geq 1$ non può aversi convergenza uniforme in $[0; a]$, perché tutte le $f_n$ sono funzioni continue su $[0; a]$ mentre il limite è discontinuo nel punto $1 \in [0; a]$.

**(b)** Per ogni $a \geq 0$ e $n \geq 2$ si ha, essendo $x^n \geq x^2$ per $x \geq 1$,

$$0 \leq f_n(x) \leq g(x) =: \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-(x^2)} & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

quindi vi è convergenza dominata. Per il teorema di Lebesgue, dunque, le $f_n$ convergono al loro limite puntuale in $L^1(a; +\infty)$.

**Esercizio 3** Posto $f(x, y, z) = 2y + x + \cos(x + y + z) - \sin(zxy) - 1$, si ha

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 - \sin(x + y + z) - zy \cos(x + y + z) \\ 2 - \sin(x + y + z) - zx \cos(x + y + z) \\ - \sin(x + y + z) - xy \cos(x + y + z) \end{pmatrix},$$

e quindi $\nabla f(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 0) = (1, 2, \pi)$. Dunque siamo nelle ipotesi del teorema del Dini, e possiamo esplicitare la $z$, almeno in un intorno di $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 0)$, come funzione delle altre due variabili. La funzione implicita $z(x, y)$ verifica pertanto $z(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}) = 0$. Derivando l'identità

$$2y + x + \cos(x + y + z(x, y)) - \sin(xyz(x, y)) = 1 - \sqrt{\pi}$$

rispetto ad $x$ e rispetto ad $y$, si ottengono le due relazioni

$$\begin{cases} 1 - (1 + z_x(x, y)) \sin(x + y + z(x, y)) - (yz(x, y) + xyz_x(x, y)) \cos(xyz(x, y)) = 0 \\ 2 - (1 + z_y(x, y)) \sin(x + y + z(x, y)) - (xz(x, y) + xyz_y(x, y) \cos(xyz(x, y)) = 0, \end{cases}$$

le quali, valutate per $x = \sqrt{\pi}$, $y = -\sqrt{\pi}$ e quindi $z = 0$, danno

$$z_x(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}) = -\frac{1}{\pi}\,, \qquad z_y(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}) = -\frac{2}{\pi}\,.$$

**Esercizio 4** Imponendo la condizione di punto critico

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{1}{x^2} + yz, -\frac{1}{y^2} + xz, -\frac{1}{z^2} + xy\right) = (0,0,0),$$

si ottiene $x^2yz = xy^2z = xyz^2 = 1$; dovendo essere non nulle tutte le coordinate, si deduce $x = y$, $y = z$ e quindi $x^4 = 1$. Pertanto gli unici punti critici sono $P(1,1,1)$ e $M(-1,-1,-1)$. Per verificarne il tipo, si considera in prima istanza la matrice Hessiana valutata nei punti critici:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & z & y \\ z & \frac{2}{y^3} & x \\ y & z & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix} (\pm 1, \pm 1 \pm 1) = \pm \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando per esempio il criterio della variazione del segno dei determinanti dei minori diagonali, si ottiene che $P(1,1,1)$ è un punto di minimo relativo, e $M(-1,-1,-1)$ è un punto di massimo relativo.

**Esercizio 5** L'insieme $\Sigma$ è un pezzo di cono equilatero con asse il segmento $(t,0,0)$, $0 \le t \le 2$. È in effetti, a parte il suo vertice, una 2-varietà. Una sua parametrizzazione è data da

$$(x,y,z) = (\sqrt{y^2+z^2}, y, z), \qquad (y,z) \in D,$$

ove $D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 + z^2 \le 4\}$. Quindi si tratta di un grafico rispetto alle variabili $(y,z)$, e l'integrale diventa, utilizzando le coordinate polari,

$$\begin{aligned} I &= \int_\Sigma (x+y+z)\,d\sigma = \int_D \left(\sqrt{y^2+z^2} + y + z\right) \sqrt{1 + \frac{y^2}{y^2+z^2} + \frac{z^2}{y^2+z^2}}\, dydz = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r(1+\cos\vartheta + \sin\vartheta)\sqrt{2}\, r\, drd\vartheta = 2\pi\sqrt{2}\int_0^2 r^2\,dr = \frac{16}{3}\,\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Esercizio 6** Per prima cosa si trasforma l'integrale del quale si deve fare la derivata, in modo che la variabile $\lambda$ si trovi solo nell'integrando. Utilizziamo il cambiamento di coordinate $(u,v) = \phi_\lambda(x,y)$: essendo

$$\det D\Phi_\lambda(x,y) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda\, e^{\lambda y} \end{pmatrix} = 1 + \lambda\, e^{\lambda y},$$

si ottiene

$$\int_{\Phi_\lambda(B)} u\, dudv = \int_B (x+\lambda)(1+\lambda\, e^{\lambda y})dxdy.$$

A questo punto osserviamo che l'integrando è derivabile rispetto a $\lambda$, con

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(x+\lambda)(1+\lambda\, e^{\lambda y}) = 1 + \lambda\, e^{\lambda y} + (x+\lambda)(1+\lambda\, y)e^{\lambda y},$$

ed inoltre questa derivata è una funzione limitata per $(x,y)\in B$ e per $|\lambda|<1$. Quindi si può derivare sotto il segno di integrale e pertanto

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\int_{\Phi_\lambda(B)} u\,dudv &= \frac{d}{d\lambda}\int_B (x+\lambda)(1+\lambda\, e^{\lambda y})dxdy = \\ &= \int_B [1+\lambda\, e^{\lambda y}+(x+\lambda)(1+\lambda\, y)e^{\lambda y}]\,dxdy,\end{aligned}$$

da cui finalmente

$$D=\left[\frac{d}{d\lambda}\int_{\Phi_\lambda(B)} u\,dudv\right]_{\lambda=0} = \int_B (1+x)\,dxdy = \pi.$$

**Esercizio 7** La superficie $S$ è la frontiera del cubo $C=[-1,1]^3$, quindi è regolare a tratti e chiusa. Utilizziamo allora il teorema della divergenza: dato che

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = 1-\sin(x+y+z)+2z\cos(x+y+z)-z^2\sin(x+y+z),$$

possiamo scrivere, detto $n$ il versore normale esterno a $S$:

$$\Phi=\int_S \langle F\cdot n\rangle\,d\sigma = \int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 [1-\sin(x+y+z)+2z\cos(x+y+z)-z^2\sin(x+y+z)]\,dxdydz.$$

Osserviamo che gli ultimi tre addendi danno luogo a integrali nulli, essendo funzioni dispari della variabile $z$ su un dominio simmetrico rispetto all'origine: quindi

$$\Phi=\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 1\,dxdydz = m_3(C) = 8.$$

**Esercizio 8** Conviene evitare il calcolo diretto, ed usare il teorema della divergenza. La semisfera $\Sigma$, unita al disco $D=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le 1,\ z=0\}$, costituisce il bordo della semipalla $B^+=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\}$. L'orientazione di $\partial B^+ = S\cup D$ coerente con le ipotesi è quella indotta dalla normale esterna, che denotiamo con $\nu$. Per il teorema della divergenza, essendo $\operatorname{div} F = 1$, si ha

$$m_3(B^+) = \int_{B^+}\operatorname{div} F\,dxdydz = \int_\Sigma \langle F,\nu\rangle\,d\sigma + \int_D \langle F,\nu\rangle\,d\sigma = \Psi + 0,$$

in quanto nell'ultimo integrale $F$ ha la terza componente nulla in $D$ mentre $\nu=(0,0,-1)$. Si conclude che, detta $B$ la sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$,

$$\Psi = m_3(B^+) = \frac{1}{2}\,m_3(B) = \frac{2}{3}\,\pi.$$

**Esercizio 9** I coefficienti di Fourier di una somma di funzioni sono la somma dei corrispondenti coefficienti di Fourier degli addendi. Il primo addendo $f(x)=3x$ è una funzione dispari, quindi sarà $a_n=0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, mentre

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{3}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \\ &= \frac{3}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = -\frac{6}{n}\,(-1)^n + \frac{3}{\pi n^2}\,[\sin nx]_{-\pi}^{\pi} = \frac{6}{n}\,(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

Il secondo addendo $g(x) = -5$ è una funzione pari, e quindi sarà $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, mentre $a_0 = -5$ e $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.
In particolare, la serie di Fourier di $f(x) + g(x) = 3x - 5$ è

$$S(x) - \frac{5}{2} + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

**Risoluzione - prima parte Galatolo-Georgiev**

**Esercizio 1** L'insieme $A$ si descrive nel modo seguente:

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 1, \ 0 \leq y \leq \frac{1}{1+x^2} \right\}.$$

Inoltre la funzione integranda è continua e non negativa. Si può dunque applicare il teorema di Fubini-Tonelli e procedere con l'integrazione iterata:

$$\begin{aligned} \int_A xy\,dxdy &= \int_1^{+\infty} \left( \int_0^{\frac{1}{x^2+1}} xy\,dy \right) dx = \int_1^{+\infty} x \left( \int_0^{\frac{1}{x^2+1}} y\,dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dz}{(z+1)^2}\,dx = \frac{1}{8}\,. \end{aligned}$$

**Esercizio 2 (a)** Analizziamo anzitutto la convergenza puntuale. Fissato $x \geq 0$, vi sono tre casi: $x < 1$, $x = 1$ e $x > 1$. Nel primo caso si ha $x^n \to 0$ e quindi $f_n(x) \to 1$ per $n \to \infty$; nel secondo caso è $x^n = 1$ e $f_n(x) = \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; nel terzo caso risulta $x^n \to +\infty$ e pertanto $f_n(x) \to 0$ per $n \to \infty$. Dunque

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Per la convergenza uniforme in $[0;a]$, notiamo che se $a < 1$ si ha

$$\sup_{x\in[0;a]} |f_n(x) - 1| = \sup_{x\in[0;a]} \frac{x^n}{1+x^n} \leq a^n \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty,$$

quindi $f_n$ converge uniformemente a 1 in $[0;a]$ per ogni $a \in ]0;1[$.
Invece se $a \geq 1$ non può aversi convergenza uniforme in $[0;a]$, perché tutte le $f_n$ sono funzioni continue su $[0;a]$ mentre il limite è discontinuo nel punto $1 \in [0;a]$.
**(b)** Per la convergenza uniforme in $[a,\infty[$, se $a \leq 1$ si ragiona come prima e si vede che non può aversi convergenza uniforme in $[a;\infty[$, perché tutte le $f_n$ sono funzioni continue su $[a;\infty[$ mentre il limite è discontinuo nel punto $1 \in [a;\infty[$.
Invece se $a > 1$ si ha

$$\sup_{x\in[a;\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x\in[a;\infty[} \frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{1+a^n} \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty,$$

quindi $f_n$ converge uniformemente a 0 in $[a;\infty[$ per ogni $a \in ]1;\infty[$.

**Esercizio 3** Posto $f(x,y,z) = 2y + x + \cos(x+y+z) - \sin(zxy) - 1$, si ha

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 - \sin(x+y+z) - zy\cos(x+y+z) \\ 2 - \sin(x+y+z) - zx\cos(x+y+z) \\ -\sin(x+y+z) - xy\cos(x+y+z) \end{pmatrix},$$

e quindi $\nabla f(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 0) = (1, 2, \pi)$. Dunque siamo nelle ipotesi del teorema del Dini, e possiamo esplicitare la $z$, almeno in un intorno di $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 0)$, come funzione delle altre due variabili. La funzione implicita $z(x,y)$ verifica pertanto $z(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}) = 0$. Derivando l'identità

$$2y + x + \cos(x + y + z(x,y)) - \sin(xyz(x,y)) = 1 - \sqrt{\pi}$$

rispetto ad $x$ e rispetto ad $y$, si ottengono le due relazioni

$$\begin{cases} 1-(1+z_x(x,y))\sin(x+y+z(x,y))-(yz(x,y)+xyz_x(x,y))\cos(xyz(x,y))=0 \\ 2-(1+z_y(x,y))\sin(x+y+z(x,y))-(xz(x,y)+xyz_y(x,y)\cos(xyz(x,y))=0, \end{cases}$$

le quali, valutate per $x=\sqrt{\pi}$, $y=-\sqrt{\pi}$ e quindi $z=0$, danno

$$z_x(\sqrt{\pi},-\sqrt{\pi})=-\frac{1}{\pi}\,,\qquad z_y(\sqrt{\pi},-\sqrt{\pi})=-\frac{2}{\pi}\,.$$

**Esercizio 4** Imponendo la condizione di punto critico

$$\nabla f(x,y,z)=\left(-\frac{1}{x^2}+yz,-\frac{1}{y^2}+xz,-\frac{1}{z^2}+xy\right)=(0,0,0),$$

si ottiene $x^2yz=xy^2z=xyz^2=1$; dovendo essere non nulle tutte le coordinate, si deduce $x=y$, $y=z$ e quindi $x^4=1$. Pertanto gli unici punti critici sono $P(1,1,1)$ e $M(-1,-1,-1)$. Per verificarne il tipo, si considera in prima istanza la matrice Hessiana valutata nei punti critici:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3} & z & y \\ z & \dfrac{2}{y^3} & x \\ y & z & \dfrac{2}{z^3} \end{pmatrix}(\pm1,\pm1\pm1)=\pm\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando per esempio il criterio della variazione del segno dei determinanti dei minori diagonali, si ottiene che $P(1,1,1)$ è un punto di minimo relativo, e $M(-1,-1,-1)$ di massimo relativo.

**Esercizio 5** L'insieme $\Sigma$ è un pezzo di cono equilatero con asse il segmento $(t,0,0)$, $0\le t\le 2$. È in effetti, a parte il suo vertice, una 2-varietà. Una sua parametrizzazione è data da

$$(x,y,z)=(\sqrt{y^2+z^2},y,z),\qquad (y,z)\in D,$$

ove $D=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2:\ y^2+z^2\le 4\}$. Quindi si tratta di un grafico rispetto alle variabili $(y,z)$, e l'integrale diventa, utilizzando le coordinate polari,

$$\begin{aligned} I &= \int_\Sigma (x+y+z)\,d\sigma=\int_D\left(\sqrt{y^2+z^2}+y+z\right)\sqrt{1+\frac{y^2}{y^2+z^2}+\frac{z^2}{y^2+z^2}}\,dydz= \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r(1+\cos\vartheta+\sin\vartheta)\sqrt{2}\,r\,drd\vartheta=2\pi\sqrt{2}\int_0^2 r^2\,dr=\frac{16}{3}\,\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Esercizio 6** Le soluzioni costanti dell'equazione sono $y(x)\equiv k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Quelle che ci interessano sono quelle comprese tra $-4$ e $5$, e sono solo tre:

$$y_1(x)\equiv-\pi,\qquad y_2(x)\equiv 0,\qquad y_3(x)\equiv\pi.$$

Essendo $f(t)=\sin t$ strettamente crescente in un intorno di $t=0$, quindi negativa per valori negativi vicini a 0 e positiva per valori positivi vicini a 0, se un dato iniziale $y_0$ è vicino a 0, la corrispondente soluzione $y(x)$ sarà decrescente se $y_0<0$ e crescente se $y_0>0$; in ogni caso,

essa si allontanerà per $x \to \infty$ dal valore critico 0.
Poiché $f(t) = \sin t$ è decrescente in un intorno di $t = -\pi$ e in un intorno di $t = \pi$, essa è positiva per valori vicini ed inferiori, ed è negativa per valori vicini e superiori: quindi, per dati iniziali vicini a $-\pi$ e maggiori di esso, oppure vicini a $\pi$ e maggiori di esso, la corrispondente soluzione $y$ sarà decrescente, mentre per dati iniziali vicini a $-\pi$ e minori di esso, oppure vicini a $\pi$ e minori di esso, la corrispondente soluzione $y$ sarà crescente; in entrambi i casi essa tenderp̀er $x \to \infty$ al valore critico $\pm\pi$. Pertanto le soluzioni stazionarie asintoticamente stabili per $x \to \infty$ sono $y_1 = -\pi$ e $y_3 = \pi$.

**Esercizio 7** La superficie $S$ è la frontiera del cubo $C = [-1, 1]^3$, quindi è regolare a tratti e chiusa. Utilizziamo allora il teorema della divergenza: dato che

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = 1 - \sin(x + y + z) + 2z \cos(x + y + z) - z^2 \sin(x + y + z),$$

possiamo scrivere, detto $n$ il versore normale esterno a $S$:

$$\Phi = \int_S \langle F \cdot n\rangle \, d\sigma = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [1-\sin(x+y+z)+2z\cos(x+y+z)-z^2\sin(x+y+z)]\, dxdydz.$$

Osserviamo che gli ultimi tre addendi danno luogo a integrali nulli, essendo funzioni dispari della variabile $z$: quindi

$$\Phi = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 1\, dxdydz = m_3(C) = 8.$$

**Esercizio 8** Conviene evitare il calcolo diretto, ed usare il teorema della divergenza. La semisfera $\Sigma$, unita al disco $D = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 \le 1, \ z = 0\}$, costituisce il bordo della semipalla $B^+ = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \ z \ge 0\}$. L'orientazione di $\partial B^+ = S \cup D$ coerente con le ipotesi è quella indotta dalla normale esterna, che denotiamo con $\nu$. Per il teorema della divergenza, essendo $\operatorname{div} F = 1$, si ha

$$m_3(B^+) = \int_{B^+} \operatorname{div} F\, dxdydz = \int_\Sigma \langle F, \nu\rangle \, d\sigma + \int_D \langle F, \nu\rangle \, d\sigma = \Psi + 0,$$

in quanto nell'ultimo integrale $F$ ha la terza componente nulla in $D$ mentre $\nu = (0, 0, -1)$. Si conclude che, detta $B$ la sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$,

$$\Psi = m_3(B^+) = \frac{1}{2}\, m_3(B) = \frac{2}{3}\,\pi.$$

**Esercizio 9** I coefficienti di Fourier di una somma di funzioni sono la somma dei corrispondenti coefficienti di Fourier degli addendi. Il primo addendo $f(x) = 3x$ è una funzione dispari, quindi sarà $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, mentre

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{3}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx = \\ &= \frac{3}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx = -\frac{6}{n}\,(-1)^n + \frac{3}{\pi n^2}\,[\sin nx]_{-\pi}^{\pi} = \frac{6}{n}\,(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Il secondo addendo $g(x) = -5$ è una funzione pari, e quindi sarà $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, mentre $a_0 = -5$ e $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.
In particolare, la serie di Fourier della funzone $f(x) + g(x) = 3x - 5$ è

$$S(x) - \frac{5}{2} + 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\sin nx.$$

**Risoluzione - seconda parte**

**Esercizio 1 (a)** L'intersezione dei due grafici è l'insieme

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x + y^2 = 2(x^2+y^4)\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \begin{cases} x + y^2 - z = 0 \\ 2(x^2+y^4) - z = 0 \end{cases} \right\}.$$

L'insieme $Z$ è limitato: infatti se $(x,y,z) \in Z$ deve essere soddisfatta l'equazione $x + y^2 = 2(x^2+y^4)$, la quale può essere riscritta nella forma

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}\,.$$

Da questa relazione segue subito che la proiezione di $Z$ sul piano $xy$ è limitata: in particolare se $(x,y,z) \in Z$ la coppia $(x,y^2)$ sta in un disco di centro $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ e raggio $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Di conseguenza, considerando una delle due altre eguaglianze che definiscono $Z$, per esempio $z = 2x^2 + 2y^4$, si ottiene anche $0 \le z \le \frac{1}{2}$.
Proviamo che l'insieme $Z$ è localmente una curva regolare. Posto

$$F(x,y,z) = (x + y^2 - z, 2(x^2+y^4) - z),$$

la matrice Jacobiana

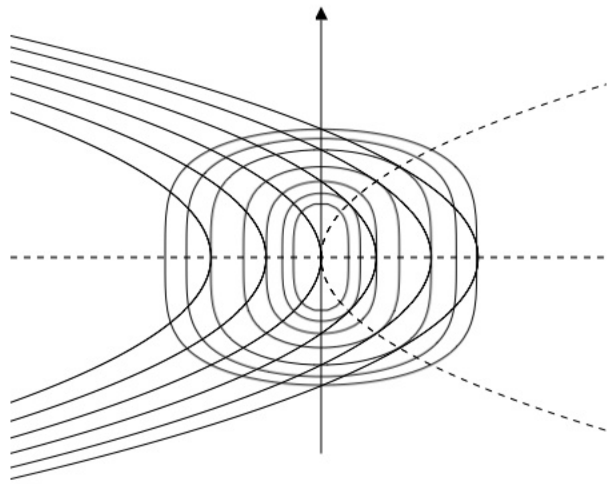
$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 4x \\ 2y & 8y^3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango massimo eguale a due: infatti, imponendo che si annullino i tre minori di ordine 2, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 8y^3 = 8xy \\ 8y^3 = 2y \\ 4x = 1, \end{cases}$$

le cui soluzioni $(\frac{1}{4},0)$, $(\frac{1}{4},\pm\frac{1}{2})$ non soddisfano l'equazione $x+y^2 = 2(x^2+y^4)$, che invece deve essere soddisfatta dalle prime due coordinate di ogni punto di $Z$.
Pertanto, per il teorema del Dini, $Z$ è localmente sostegno di una curva regolare in ogni suo punto.

**(b)** Le curve di livello di $u$ sono le parabole $x = -y^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$; quelle di $v$ sono curve chiuse, a simmetria assiale, di equazioni $(x^2+y^4) = \frac{\delta}{2} = d$, $d \ge 0$ (per $d = 0$ la curbva si riduce a un punto, l'origine). Si osservi che se $d > 1$ l'asse maggiore è quello orizzontale, viceversa se $d < 1$ quello verticale. Un disegno approssimativo è il seguente:



**(c)** Le curve di livello di $u$ e quelle di $v$ sono fra loro tangenti nei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, comuni ad entrambe, nei quali i vettori $\nabla u(x, y)$ e $\nabla v(x, y)$ sono paralleli: quindi dobbiamo trovare i punti che risolvono, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, il sistema

$$\begin{cases} 1 = 4\lambda x \\ 2y = 8\lambda y^3 \end{cases}$$

Se $y = 0$ si trova ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (basta scegliere $\lambda = \frac{1}{4x}$); quindi la retta $y = 0$, privata dell'origine, fa parte del luogo che stiamo cercando. Però, come osservato, l'origine è l'insieme di livello 0 di $v$ ed è contenuto alla curva di livello 0 di $u$: dunque possiamo onsiderare questo caso degenere come un caso di tangenza e quindi inserire nel luogo che stiamo cercando l'intera retta $y = 0$.
Se invece $y \neq 0$, si trova $\lambda = \frac{1}{4y^2}4$ e quindi $x = \frac{1}{4\lambda} = y^2$, ossia fa parte del nostro luogo anche la parabola $x = y^2$. Dunque il luogo dei punti dove le curve di livello di $u$ e di $v$ sono mutuamente tangenti è descritto dall'equazione $y(x - y^2) = 0$.

**Esercizio 2 (a)** Calcoliamo anzitutto $\operatorname{rot} W$: essendo

$$W(x, y, z) = (y + u\,v_x, -x + u\,v_y, 1 + u\,v_z),$$

si ha facilmente, tenendo conto di qualche cancellazione,

$$\operatorname{rot} W(x, y, z) = \begin{pmatrix} D_y(1 + u\,v_z) - D_z(-x + u\,v_y) \\ D_z(y + u\,v_x) - D_x(1 + u\,v_z) \\ D_x(-x + u\,v_y) - D_y(y + u\,v_x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_x v_y \\ u_x v_z - u_z v_x \\ -2 + u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix};$$

pertanto

$$\operatorname{rot} W(x, y, z) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} u_y v_z - u_z v_y = 0 \\ u_x v_z - u_z v_x = 0 \\ u_x v_y - u_y v_x = 2. \end{cases}$$

Le prime due equazioni si possono riscrivere come

$$\begin{pmatrix} -v_x & u_x \\ -v_y & u_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_z \\ v_z \end{pmatrix} = 0,$$

e poiché il determinante della matrice, $u_x v_y - v_x u_y$ è non nullo (in virtù della terza equazione), otteniamo che il sistema precedente equivale a

$$\begin{cases} u_z = 0 \\ v_z = 0 \\ u_x v_y - u_y v_x = 2. \end{cases}$$

Ne segue la tesi, ossia che il sistema precedente equivale all'annullarsi di $\operatorname{rot} W$.

**(b)** Supponiamo che $W(x,y,z) = \nabla w(x,y,z)$, con $w \in C^2(\mathbb{R}^3)$: in particolare $W$ è irrotazionale e quindi valgono le condizioni

$$\begin{cases} u_z = 0 \\ v_z = 0 \\ u_x v_y - u_y v_x = 2. \end{cases}$$

Ne segue, essendo $W = (w_x, w_y, w_z)$,

$$D\Psi(x,y,z) = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & -x + u\, v_y \\ u_z & v_z & 1 + u\, v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & y + u\, v_x \\ u_y & v_y & -x + u\, v_y \\ u_z & v_z & 1 + u\, v_z \end{pmatrix}.$$

Perciò

$$\det D\Psi(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} u_x & v_x & y + u\, v_x \\ u_y & v_y & -x + u\, v_y \\ u_z & v_z & 1 + u\, v_z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_x & v_x & y \\ u_y & v_y & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0,$$

e dunque $\Psi$ è localmente invertibile in ogni punto.