Note teoriche sulle continuità
prima parte, lezioni del 15 e 16 ottobre 2015

Continuità di funzioni tra spazi metrici

Definizione Siano (X, d), (Y, δ) due spazi metrici $f: X \to Y$, $x_0 \in X$

f si dice continua in x_0, ovvero x_0 punto di continuità per f relativamente alle distanze δ e d, se

o x_0 è isolato o $\delta\text{-}\lim\limits_{x \xrightarrow{d} x_0} f(x) = f(x_0)$ cioè
la preimagine di un intorno di $f(x_0)$ è intorno di x_0. *

Definizione Nelle precedenti notazioni f si dice continua su X se ogni $x \in X$ è punto di continuità per f.

Nota: nelle precedenti notazioni, se $E \subseteq X$
$f|_E$ può essere continua su E, ma nessun punto di E essere di continuità per f.

Per esempio:

- $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{Q} \\ 1 & t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

  $f|_E \equiv 1$ quindi è continua su E

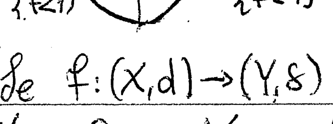
  ma poiché dato $t \notin \mathbb{Q}$ $\exists t_n \in \mathbb{Q}$ $t_n \xrightarrow[n \to \infty]{} t$

  $f(t_n) = 0 \underset{n \to \infty}{\not\to} 1 = f(t)$.

- $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $E = \{(x, x^2) ; x \in \mathbb{R}\}$ (grafico di una parabola)

  $f(x,y) = \begin{cases} 1 & y = x^2 \\ 0 & y \neq x^2 \end{cases}$ $\quad f|_E \equiv 1$ quindi è continua su E

  ma $f(x, x^2 + z) = 0 \underset{z \to 0^+}{\not\to} 1 = f(x, x^2)$.



Nota: Se $f: (X,d) \to (Y,\delta)$ è continua in x_0, e d' è equivalente a d su X, δ' a δ su Y si ha per * $f: (X, d') \to (Y, \delta')$ continua in x_0.

Esempi: • Le funzioni costanti sono continue: $(X,d)=\mathbb{R}$, $(Y,\delta)=\ell^2$, $f(t)\equiv\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ $\forall t\in\mathbb{R}$.

• Le funzioni reali di variabile reale continue (polinomi, funzioni trigonometriche, esponenziali...) sono continue nell'accezione generale qui presentata.

• Dato $x_0\in X$, $f(x)=:d(x_0,x)$ $f:X\to\mathbb{R}$ è continua

$d(x_0,x)-d(x_0,z)\leq d(x,z)$ triangolare

$d(x_0,z)-d(x_0,x)\leq d(z,x)$ " quindi $|d(x_0,z)-d(x_0,x)|\leq d(x,z)$

per definizione $z\xrightarrow{d}x$ significa $d(x,z)\to 0$, per cui f è continua.

Definizione: una funzione $f:(X,d)\to(Y,\delta)$ tra spazi metrici si dice lipschitziana di costante $L\geq 0$ se:

$$\delta(f(x),f(z))\leq L\, d(x,z) \qquad \forall x,z\in X$$

In altre parole le "pendenze" $\frac{\delta(f(x),f(z))}{d(x,z)}$ sono limitate da L.

Nota: le funzioni lipschitziane sono continue

• $(X,d)=\mathbb{R}^N$, $(Y,\delta)=\mathbb{R}^M$ $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^M$ lineare: f è continua.(1)

in effetti è lipschitziana, e poiché $|f(u)-f(v)|_{\mathbb{R}^M}=|f(u-v)|_{\mathbb{R}^M}$ basta mostrare che per qualche $L\geq 0$ $|f(w)|_{\mathbb{R}^M}\leq L\cdot|w|_{\mathbb{R}^N}$ $\forall w$.

$f(w)=Hw$ H matrice $N\times M$ associata, di righe H_i, $1\leq i\leq M$

$|f(w)|_{\mathbb{R}^M}=|Hw|_{\mathbb{R}^M}=|(H_1\circ w,\dots,H_M\circ w)|_{\mathbb{R}^M}=\sqrt{\sum_{i=1}^{M}|H_i\circ w|^2}\leq$ Cauchy-Schwarz

$\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{M}|w|^2_{\mathbb{R}^N}\cdot|H_i|^2_{\mathbb{R}^N}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{M}|H_i|^2_{\mathbb{R}^N}}\cdot|w|_{\mathbb{R}^N}$ $\quad L=:\sqrt{\sum_{i=1}^{M}|H_i|^2_{\mathbb{R}^N}}\in\mathbb{R}$

In altri termini $\sup\limits_{w}\frac{|f(w)|_{\mathbb{R}^M}}{|w|_{\mathbb{R}^N}}=\sup\limits_{|w|_{\mathbb{R}^N}\leq 1}\frac{|f(w)|_{\mathbb{R}^M}}{|w|_{\mathbb{R}^N}}=\sup\limits_{|w|_{\mathbb{R}^N}=1}|f(w)|_{\mathbb{R}^M}\leq L<\infty$.

• $(X,d)=\left(\mathcal{C}[0,1],\int_0^1|\varphi(t)-\psi(t)|\,dt\right)$ $f(\varphi)=\varphi(0)$ $f:\mathcal{C}[0,1]\to\mathbb{R}$

f è lineare, ma non continua: $\varphi_n(t)=\sqrt{n}(1-t)^n$ $|\varphi_n|_{L^1}=\frac{\sqrt{n}}{n+1}\to 0$ ma $f(\varphi_n)=\sqrt{n}\nearrow+\infty$.

(1) Vedremo una dimostrazione più elementare. Questo è utile esercizio algebrico.

APPROFONDIMENTO

[**Teorema** $f: V \to W$, $(V, |\cdot|_V)$ e $(W, |\cdot|_V)$ spazi normati, f lineare:
f è continua se e solo se $\sup_{v \in V} \frac{|f(v)|_W}{|v|_V} < \infty$.

DIM $\Leftarrow$ Posto $L = \sup_{v \in V} \frac{|f(v)|_W}{|v|_V} < \infty$ si ha $|f(v)|_W \leq L \cdot |v|_V$ $\forall v \in V$
quindi $|f(x) - f(z)|_W = |f(x-z)|_W \leq L|x-z|_V$ $\forall x, z \in V$.

$\Rightarrow$ Per linearità di f: $W\text{-}\lim_{z \xrightarrow[|\cdot|_V]{} x} f(z) = f(x)$ equivale $W\text{-}\lim_{z-x \xrightarrow[|\cdot|_V]{} 0_V} f(z-x) = 0_W$

cioè $|f(v)|_W \to 0$ per $|v|_V \to 0$ cioè $\forall \varepsilon > 0\ \exists \rho > 0\ |v|_V \leq \rho \Rightarrow |f(v)|_W \leq \varepsilon$
cioè $\forall \varepsilon > 0\ \exists \rho > 0$ $f(\overline{B}_V(0_V, \rho)) \subset \overline{B}_W(0_W, \varepsilon)$ indicando con $f(A)$: $\mathrm{Im}_A f$.
Indicando poi $t \cdot E = \{te : e \in E\}$, $t \in \mathbb{R}$ E sottoinsieme di uno spazio vettoriale, si ha $f(\overline{B}_V(0_V, \rho)) = f(\rho \overline{B}_V(0_V, 1)) =$ (linearità) $\rho \cdot f(\overline{B}_V(0_V, 1))$
si ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists \rho > 0$ $f(\overline{B}_V(0_V, 1)) \subset \frac{\varepsilon}{\rho} \overline{B}_W(0_W, 1)$ cioè
$\forall \varepsilon\ \exists \rho\ \forall v$ $|v|_V \leq 1 \Rightarrow |f(v)|_W \leq \frac{\varepsilon}{\rho}$.
Quindi fissato ε e per un opportuno ρ si ha
$\forall u \in V \setminus 0_V$ $|f(u)|_W = \left|f\left(\frac{u}{|u|_V}\right) \cdot |u|_V\right|_W = \left|f\left(\frac{u}{|u|_V}\right)\right| \cdot |u|_V \leq \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot |u|_V$
Pertanto
$$\sup_{u \in V} \frac{|f(u)|_W}{|u|_V} \leq \frac{\varepsilon}{\rho} < \infty. \quad \blacksquare \ ]$$

Nota: $\sup_{u \in V} \frac{|f(u)|_W}{|u|_V} \geq \sup_{|u|_V \leq 1} \frac{|f(u)|_W}{|u|_V} \geq \sup_{|u|_V \leq 1} |f(u)|_W \geq \sup_{|u|_V = 1} |f(u)|_W =$
$= \sup_{v \in V} \left|f\left(\frac{v}{|v|_V}\right)\right|_W = \sup_{v \in V} \frac{|f(v)|_W}{|v|_V}$ quindi son tutte eguaglianze
$$\sup_{v \in V} \frac{|f(v)|_W}{|v|_V} = \sup_{|v|_V \leq 1} \frac{|f(v)|_W}{|v|_V} = \sup_{|v|_V \leq 1} |f(v)|_W = \sup_{|v|_V = 1} |f(v)|_W.$$

Nota: quindi su spazi normati di dimensione infinita si trovano funzioni lineari, come la valutazione in 0 per le funzioni $\mathcal{C}[0;1]$, che non sono continue, nel caso rispetto alla norma integrale.

- Si osservi che la stessa funzione $f(\varphi) = \varphi(0)$ $\varphi \in \mathcal{C}[0,1]$ è continua per la norma uniforme $f: (\mathcal{C}[0;1], \sup_{0 \leq t \leq 1} |\varphi(t)|) \to \mathbb{R}$, in quanto la convergenza uniforme implica la puntuale e in particolare $\varphi_n(0) \to 0$.

APPROFONDIMENTO

[Teorema. Siano $(U_1, |\cdot|_{U_1}), \dots, (U_k, |\cdot|_{U_k})$ spazi di Banach ovvero spazi normati e completi (1), $(W, |\cdot|_W)$ normato.

Se si considera su $U_1 \times \dots \times U_k$ la norma $|(u_1,\dots,u_k)|_1 = |u_1|_{U_1} + \dots + |u_k|_{U_k}$, e un operatore k-lineare $B: U_1 \times \dots \times U_k \to W$ si ha

B è continuo $\iff \exists L \geq 0 \quad |B(u_1, \dots u_k)|_W \leq C|u_1|_{U_1} \cdots |u_k|_{U_k}$

DIM.

$\Rightarrow$ Tale implicazione richiede concetti molto più avanzati.

$\Leftarrow$ Va mostrato $|B(u_1,\dots u_k) - B(u_1^0,\dots,u_k^0)|_W \longrightarrow 0$ per $|u_1-u_1^0|_{U_1} + \dots |u_k-u_k^0|_{U_k} \to 0$

Se uno degli $u_j^0 = 0_{U_j}$, ciò segue immediatamente dall'ipotesi.

Per ridursi a ciò si usa la multilinearità e la triangolare:

$$B(u_1,\dots u_k) - B(u_1^0,\dots u_k^0) = B(u_1\dots u_k) - B(u_1^0, u_2 \dots u_k) + B(u_1^0, u_2 \dots u_k) - B(u_1^0, u_2^0 \dots u_k^0) =$$
$$= B(u_1 - u_1^0, u_2 \dots u_k) + B(u_1^0, u_2 \dots u_k) - B(u_1^0 \dots u_k^0) = \dots$$
$$= B(u_1-u_1^0, u_2 \dots u_k) + B(u_1^0, u_2-u_2^0, u_3 \dots u_k) + B(v_1^0, v_2^0, u_3 \dots) - B(u_1^0 \dots v_k^0) =$$
$$\dots = B(u_1-u_1^0, u_2 \dots) + B(u_1^0, u_2-u_2^0, u_3 \dots) + B(v_1^0, v_2^0, u_3-u_3^0, u_4 \dots) + B(v_1^0, v_2^0 \dots, v_{k-1}^0, v_k - u_k^0) \quad \blacksquare \;]$$

Vediamo nel caso più semplice di operatore multilineare la continuità direttamente ($k=2$, $U_1 = U_2 = \mathbb{R} = W$, $B(u_1,u_2) = u_1 \cdot u_2$)

Teorema Il prodotto di due numeri reali $B: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $B(u_1,u_2) = u_1 \cdot u_2$ è continuo da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$.

DIM $|u_1 u_2 - u_1^0 u_2^0| = |u_1 u_2 - u_1^0 u_2 + u_1^0 u_2 - u_1^0 u_2^0| \leq |u_1 u_2 - u_1^0 u_2| + |u_1^0 u_2 - u_1^0 u_2^0| =$
$= |u_2||u_1 - u_1^0| + |u_1^0||u_2 - u_2^0|$

dovendo fare il limite per $(u_1, u_2) \to (u_1^0, u_2^0)$ si possono considerare gli (u_1, u_2) : $|u_1 - u_1^0| + |u_2 - u_2^0| \leq 1$. Pertanto $|u_2| \leq |u_2 - u_2^0| + |u_2^0| \leq 1 + |u_2^0|$

$|u_1 u_2 - u_1^0 u_2^0| \leq (1 + |u_2^0|)|u_1 - u_1^0| + |u_1^0||u_2 - u_2^0|$. $\blacksquare$

Teorema (X, d) spazio metrico, $d: (X \times X,\ d_1((x,z),(x',z')) = d(x,x') + d(z,z')) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua.

DIM. $d(x,z) - d(x_0,z_0) \leq d(x,x_0) + d(x_0,z) - d(x_0,z_0) \leq d(x,x_0) + d(z_0,z)$ (TRIANGOLARE, TRIANGOLARE), scambio (x,z) con (x_0,z_0) ottenendo, poiché $d(x,x_0) = d(x_0,x)$, $d(z,z_0) = d(z,z_0)$,

$|d(x,z) - d(x_0,z_0)| \leq d(x,x_0) + d(z,z_0)$ $\blacksquare$

(1) La nozione di completezza verrà introdotta in seguito.

Teorema (composizione e generazione di funzioni continue).

(X,d), (Y,δ), (Z,D) siano spazi metrici, $x_0 \in X$, $z_0 \in Z$.

$Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ Se f è continua in x_0, g in z_0 e $g(z_0) = x_0$, allora

$f \circ g : Z \to Y$ è continua in z_0.

$f \circ g(z) =: f(g(z))$

DIM Con $\varphi^{-1}(A)$ si indica la preimmagine di A tramite φ: $\{x \in \mathrm{dom}\,\varphi : \varphi(x) \in A\}$.
Si osservi preliminarmente che $(\varphi \circ \psi)^{-1}(A) = \psi^{-1}(\varphi^{-1}(A))$. Va mostrato che se U è intorno di $f \circ g(z_0) = f(g(z_0)) = f(x_0)$ allora $(f \circ g)^{-1}(U)$ lo è di z_0.
Per continuità di f: $f^{-1}(U)$ è intorno di $x_0 = g(z_0)$, quindi per continuità di g: $g^{-1}(f^{-1}(U))$ è intorno di z_0 ∎

Nota: $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $S(x,y) = x+y$, la somma di due numeri, è lineare, quindi essendo in dimensione finita continua.
Mostriamolo direttamente: $|S(x,y) - S(x^0,y^0)| = |x+y-x^0-y^0| \le |x-x^0| + |y-y^0|$.

Continuità per componenti

Teorema Se $(Y_1,\delta_1), \dots, (Y_k,\delta_k)$, (X,d) sono spazi metrici,
$f_1 : X \to Y_1$, $\dots$, $f_k : X \to Y_k$ sono continue in $x_0 \in X$ se e solo se
$f : X \to Y_1 \times \dots \times Y_k$ con la distanza $\delta_{\ell^1}((y_1 \cdots y_k),(z_1 \cdots z_k)) =: \delta_1(y_1,z_1) + \dots + \delta_k(y_k,z_k)$
$f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ è continua in x_0.

DIM Se f è continua poiché $\delta_i(f_i(x), f_i(x_0)) \le \delta(f(x), f(x_0))$ si ha la continuità delle f_i in x_0. Viceversa
$\delta(f(x), f(x_0)) = \delta_1(f_1(x), f_1(x_0)) + \dots + \delta_k(f_k(x), f_k(x_0)) \le \varepsilon$ se $d(x,x_0) \le \bar\rho$
$\bar\rho = \min\{\rho_1, \dots, \rho_k\}$: $d(x,x_0) \le \rho_i \Rightarrow \delta_i(f_i(x), f_i(x_0)) \le \frac{\varepsilon}{k}$ ∎

Nota: sullo spazio $(Y_1 \times \dots \times Y_k, \delta)$ si possono mettere le distanze equivalenti $\delta_{\ell^2}((y_1 \cdots y_k),(z_1 \cdots z_k)) = \sqrt{\delta_1^2(y_1,z_1) + \dots + \delta_k^2(y_k,z_k)}$, $\delta_{\ell^\infty}((y_1 \cdots y_k),(z_1 \cdots z_k)) = \max_{1 \le i \le k} \delta_i(y_i,z_i)$.
Nota: usando i due teoremi, la continuità della somma e del prodotto si ottiene che tutte le funzioni k lineari $L : \mathbb{R}^{N_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{N_k} \to \mathbb{R}^M$, essendo in particolare con componenti polinomiali, sono continue.