Schema iniziale sulle funzioni uniformemente continue

Definizione (X,d), (Y,δ) spazi metrici, $f: X \to Y$ si dice uniformemente continua se

- $\forall \varepsilon\ \exists \rho_\varepsilon\ \forall x,y\ \ d(x,y) \le \rho \Rightarrow \delta(f(x),f(y)) \le \varepsilon$ ovvero
- $\forall \varepsilon\ \exists \rho_\varepsilon\ \forall x\ \ \bar{B}_d(x,\rho) \subseteq f^{-1}(\bar{B}_\delta(f(x),\varepsilon))$ ovvero
- $\forall \varepsilon\ \exists \rho_\varepsilon\ \sup_x \sup_{y\in B(x,\rho)} \delta(f(x),f(y)) \le \varepsilon$ ovvero
- $\lim_{\rho\to 0} \sup_x \sigma(x,\rho) = 0$ $\quad \sigma_f(x,\rho) = \sup_{y: d(x,y)\le\rho} \delta(f(x),f(y))$

Definizione $\sigma_f(x,\cdot)$ si dice modulo di continuità di f e centro x.

Nota: l'uniforme continuità su X che la variazione di $f(y)$ da $f(x)$ dipende solo da $d(y,x)$ e non da x.

In altri termini

continuità in x_0: $\sigma(x_0,\rho) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$

continuità su X: $\sigma(x,\rho) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$ puntualmente in X

uniforme continuità su X: $\sigma(\cdot,\rho) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$ uniformemente su X

In particolare l'uniforme continuità comporta la continuità in ogni punto.

Esempi:

- $X = Y = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x$ $\quad \sigma_f(x,\rho) = \sup_{y\,|x-y|\le\rho} |x-y| = \rho$; $\sup_x \rho = \rho$

  è uniformemente continua
- f lipschitziana tra (X,d) e (Y,δ) è uniformemente continua

$$\sigma_f(x,\rho) = \sup_{y\ d(x,y)\le\rho} \delta(f(x),f(y)) \le \sup_{y\ d(x,y)\le\rho} L\,d(x,y) = L\rho$$

$$\sup_x \sigma_f(x,\rho) \le L\rho \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$$

- Altre classi di funzioni uniformemente continue si hanno quando $\omega_f(\rho) = \sup_x \sigma(x,\rho)$, almeno per ρ piccoli, è maggiorato da funzioni note infinitesime per $\rho \to 0$:

Definizione f si dice localmente uniformemente hölderiana di esponente $\alpha \in (0,1]$:

$$\exists C\, \exists R \quad d(x,y) \le R \Rightarrow \delta(f(x),f(y)) \le C\,(d(x,y))^\alpha$$

- $X = Y = [0,+\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{|x-y|}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\sqrt{|x-y|} \le \sqrt{|x-y|}$

Esercizio $f(x) = \dfrac{1}{|\log x|}$ $\quad 0 < x \le \frac{1}{e}$, $f(0) = 0$ non è hölderiana per nessun α.

(In seguito si potrà mostrare agevolmente la sua uniforme continuità)

2 uc

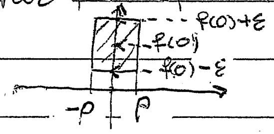
- $X=Y=\mathbb{R}$ $f(x)=x^2$ è continua ma non uniformemente.

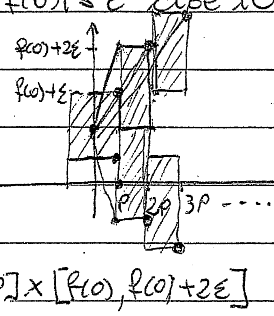
$x_n=n$, $y_n=n+\frac{1}{n}$ $d(x_n,y_n)=|x_n-y_n|=\frac{1}{n}\to 0$, $\delta(f(x_n),f(y_n))=n^2+\frac{1}{n^2}+2-n^2\to 2$.

- Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è uniformemente continua allora

$\exists M$. $|f(x)|\le M|X|+|f(0)|$ (se $\forall\varepsilon\,\exists\rho$ $|x-y|\le\rho\Rightarrow|f(x)-f(y)|\le\varepsilon$ si ha $M=\frac{2\varepsilon}{\rho}$)

idea a livello grafico: per $-\rho\le x\le\rho$ è $|f(x)-f(0)|\le\varepsilon$ cioè il grafico deve essere contenuto





si suddivide il dominio in intervalli ampli ρ

$f(\rho)$ male che vada vale $f(0)+\varepsilon$ o $f(0)-\varepsilon$

$(x,f(x))$ per $x\in[\rho,2\rho]$ deve stare nel rettangolo $[\rho,2\rho]\times[f(0),f(0)+2\varepsilon]$

o in quello $[\rho,2\rho]\times[f(0)-2\varepsilon,f(0)]$

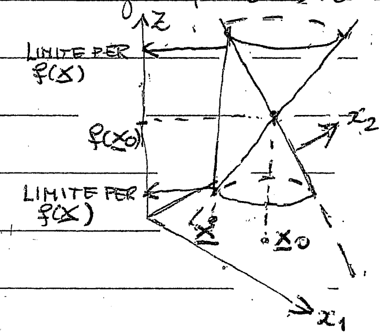
$(x,f(x))$ per $x\in[n\rho,(n+1)\rho]$ male che vada deve stare in uno

dei rettangoli estremi $[f(0)+(n-1)\varepsilon;f(0)+n\varepsilon]$; $[f(0)-n\varepsilon,f(0)-(n-1)\varepsilon]$

Comunque $|f(x)|\le|f(x)-f(0)|+|f(0)|$ se $n\rho\le x\le(n+1)\rho$

$$\le\frac{(n+1)\varepsilon}{n\rho}|X|+|f(0)|\le\frac{2\varepsilon}{\rho}|X|+|f(0)|$$

- Se $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ è lipschitziana di costante L, per ogni $\underline{x}_0\in\mathbb{R}^N$ grafico è contenuto nel complementare del doppio ipercono



$$\{(\underline{x},z)\in\mathbb{R}^{N+1}:L^2|\underline{x}-\underline{x}_0|^2_{\mathbb{R}^2}=|z-f(\underline{x}_0)|^2\}$$

di vertice $(\underline{x}_0,f(\underline{x}_0))$ e pendenza L

$$L^2(x_1-x_{01})^2+L^2(x_2-x_{02})^2=(z-f(x_{01},x_{02}))^2$$

Esercizio: ~~mostrare che le funzioni $\sin x$, $\frac{\sin x^2}{1+|x|}$~~, $\cos\sqrt{x}$ sono uniformemente continue, mentre, $\sin(x^2)$, $x\sin\frac{1}{x}$ no.

Teorema: composizione di funzioni uniformemente continue è uniformemente continua

DIM Se $D(z,\zeta)\le R\Rightarrow d(g(z),g(\zeta))\le\rho$ e $d(x,\xi)\le\rho\Rightarrow\delta(f(x),f(\xi))\le\varepsilon$ allora

$$D(z,\zeta)\le R\Rightarrow\delta(f(g(z));f(g(\zeta))\le\varepsilon \quad ■$$

Teorema: $\Psi:(X,d)\to(Y,\delta)$ sia uniformemente continua, $f:\mathrm{dom}f\subseteq(Z,D)\to\mathcal{B}(I,(X,d))$,

se $f_z\xrightarrow{\text{UNIF}}g$ $z\xrightarrow{D}z_0$ allora $\Psi\circ f_z\xrightarrow{\text{UNIF}}\Psi\circ g$, $z\xrightarrow{D}z_0$

DIM $\sup_{u\in I}d(f_z(u),g(u))\le\rho_\varepsilon\Rightarrow\sup_{u\in I}\delta(\Psi(f_z(u)),\Psi(g(u)))\le\varepsilon$ se $\sup_{d(x,x')\le\rho_\varepsilon}\delta(\Psi(x),\Psi(x'))\le\varepsilon$ ■