Teoremi ponte.

Si passano in rapida rassegna alcune equivalenze di espressioni nei diversi linguaggi (distanze, aperti, successioni...) dei medesimi concetti, e relazioni tra proprietà espresse in diversi linguaggi.

Sia (X,d) uno spazio metrico

i) C è chiuso se e solo se $\forall x [(\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ (x_n) \xrightarrow{d} x,\ x_n \in C) \Rightarrow x \in C]$
(chiuso per successioni)

ii) x di accumulazione per B se e solo se $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} (x_n \in B\setminus\{x\} \text{ e } (x_n) \xrightarrow{d} x)$

iii) $f:(X,d)\to(Y,\delta)$ è continua in x_0 se e solo se $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{d} x \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\delta} f(x)$

DIM i) $\Rightarrow$ U intorno di x, per definizione $\exists N\ \forall n \geq N\ x_n \in U$: quindi $x_n \in U\cap C \neq \emptyset$ essendo C chiuso per l'arbitrarietà di U si ha $x\in C$

i) $\Leftarrow$ Se x è tale che per ogni suo intorno V: $V\cap C\neq\emptyset$ in particolare $\forall n\ B(x,\frac{1}{n})\cap C\neq\emptyset$ preso $x_n\in B(x,\frac{1}{n})\cap C$ si ha che $d(x_n,x)<\frac{1}{n}\to 0$.

ii) analogo iii) deriva dai criteri di (non) convergenza e dalla definizione di continuità ∎

iv) d' è una distanza equivalente (debolmente) a d se e solo se d' ha le stesse successioni convergenti di d, e agli stessi limiti

DIM Immediato dalla definizione di convergenza e da quella di distanze debolmente equivalenti: hanno gli stessi intorni per definizione

v) d' è una distanza debolmente equivalente a d se e solo se la funzione

$id_X:(X,d)\to(X,d')$
$id_X:(X,d')\to(X,d)$
è continua

DIM Come sopra.

Proposizione $f:(X,d)\to(Y,\delta)$ è continua su X se e solo se

vi) per ogni Ω aperto in (Y,δ) $f^{-1}(\Omega)$ è aperto in (X,d). se e solo se ✓

vii) per ogni Γ chiuso in (Y,δ) $f^{-1}(\Gamma)$ è chiuso in (X,d) se e solo se ✓

viii) per ogni x, $(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{d} x$ si ha $(f(x_n))\xrightarrow[n\to\infty]{\delta} f(x)$ ✓

Nota: non è vero che l'immagine di un chiuso (aperto) mediante una funzione continua lo sia: $f(x,y)=x$ $C=\{(x,y):xy=1\}$; $f(x)\equiv x^2$ $A=\mathbb{R}$.

DIM vi) Per definizione se f è continua la preimmagine di un intorno di $f(x)$ è intorno di x: ora se V è intorno di $f(x)\in\Omega$ $V\subset\Omega$ si ha $f^{-1}(V)\subset f^{-1}(\Omega)$, $f^{-1}(V)$ intorno di x. Il viceversa è immediato poiché ogni intorno contiene una palla aperta (in Y) di centro $f(x)$; la sua preimmagine sarà un aperto a cui appartiene x: e quindi intorno di x.

vii) Γ chiuso se e solo se $Y\setminus\Gamma$ aperto $f^{-1}(Y\setminus\Gamma)=X\setminus f^{-1}(\Gamma)$ aperto in (X,d) quindi $f^{-1}(\Gamma)$ chiuso in (X,d)

viii) È la caratterizzazione di convergenza: criteri di (non) esistenza dei limiti ■

Proposizione $f:(X,d)\to(Y,\delta)$ continua

$\Downarrow$

$\{(x,y): y=f(x)\}$ il grafico di f è chiuso in $X\times Y$ per la distanza $d_{\ell^1}((x,y),(x',y'))=d(x,x')+\delta(y,y')$

DIM Si mostra che è chiuso per successioni (i): $((x_n,f(x_n)))\xrightarrow{d_{\ell^1}}(x,y)$ $\Leftrightarrow$ $(x_n)\xrightarrow{d} x$ e $f(x_n)\xrightarrow{\delta} y$. Per continuità dalla $(x_n)\xrightarrow{d} x$ si ha $(f(x_n))\xrightarrow{\delta} f(x)$, quindi $\delta(f(x),y)=0$ quindi $f(x)=y$, per cui $(x,y)=(x,f(x))$ sta nel grafico. ■

Nota: Il viceversa è falso

$$X=Y=\mathbb{R}\qquad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

$\Gamma=\{(x,y): y=\frac{1}{x},\ x\neq 0\}\cup\{(0,1)\}$ è chiuso: $\Gamma=\{(x,y): xy=1\}\cup\{(0,1)\}$

$\{(0,1)\}$ è chiuso, $\{(x,y):xy=1\}=g^{-1}(\{1\})$ $g(x,y)=xy:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continua e vii).

Proposizione $f:(X,d)\to(Y,\delta)$

α) f uniformemente continua $\Rightarrow$ f trasforma successioni di Cauchy in (X,d) in successioni di Cauchy in (Y,δ)

β) f uniformemente continua $\Rightarrow$ f trasforma totalmente limitati di (X,d) in totalmente limitati di (Y,δ)

γ) f uniformemente continua $\Longleftrightarrow$ $\forall\,(x_n),(x'_n)$ in X se $d(x_n,x'_n)\to 0$ $n\to\infty$, allora $\delta(f(x_n),f(x'_n))\longrightarrow 0$ $n\to\infty$

DIM α) Dato $\rho>0$ e (x_n) di Cauchy $\exists N_\rho\ \forall n,m\geq N$ $d(x_n,x_m)\leq\rho$

dato $\varepsilon>0$ $\exists\rho_\varepsilon>0$ $d(x,x')\leq\rho\Rightarrow\delta(f(x),f(x'))\leq\varepsilon$.

Quindi $\forall\varepsilon$ $\exists N=N_{\rho_\varepsilon}$ $\forall n,m\geq N$ $\delta(f(x_n),f(x_m))\leq\varepsilon$.

β) Del tutto analogo: dato $\rho>0$ E totalmente limitato in (X,d) vi sono $c_1,\dots,c_k$: $E\subset\bigcup_{i=1}^{k}B(c_i,\rho)$;

dato $\varepsilon>0$ $\exists\rho_\varepsilon$ $d(x,x')\leq\rho\Rightarrow\delta(f(x),f(x'))\leq\varepsilon$.

Quindi $\forall\varepsilon$ $f(E)\subset\bigcup_{i=1}^{k}B(f(c_i^\varepsilon),\varepsilon))$

γ) $\Rightarrow$ analogo.

γ) $\Leftarrow$ Per assurdo: se f non fosse uniformemente continua

$\exists\varepsilon_0>0$ $\forall n$ $\exists x_n,x'_n$: $d(x_n,x'_n)\leq\frac{1}{n}$ ma $\delta(f(x_n),f(x'_n))\geq\varepsilon_0>0$

$d(x_n,x'_n)\to 0$ ma $\delta(f(x_n),f(x'_n))\not\to 0$. ▨

Nota Le implicazioni α) e β) non sono equivalenze

$f(x)=x^2$, se (x_n) è di Cauchy in $\mathbb{R}$ è limitata $\sup_{x\in\mathbb{N}}|x_n|\leq M<\infty$

ma $f|_{[-M,M]}$ è $2M$ lipschitziana: $\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\right|=|f'(\xi)|=2|\xi|\leq 2M$

quindi uniformemente continua quindi $f(x_n)$ è di Cauchy.

Esercizio $f(x)=\cos\frac{1}{x}$, $x>0$ è continua su $(0,+\infty)$, si mostri che non trasforma successioni di Cauchy in successioni di Cauchy

Esercizio - $f:(X,d)\to(Y,\delta)$ continua (X,d) completo $\Rightarrow$ f trasforma successioni di Cauchy in successioni di Cauchy

- (Y,δ) completo f trasforma successioni di C. in successioni di C. $\Rightarrow$ f continua

Proposizione $f_n : (X,d) \to (Y,\delta)$ successione di funzioni δ-limitate, convergente uniformemente su X ad $f : (X,d) \to (Y,\delta)$ continua.
Allora se $(x_n) \xrightarrow{d} x$ si ha $f_n(x_n) \xrightarrow{\delta} f(x)$.

DIM

$$\delta(f_n(x_n), f(x)) \le \delta(f_n(x_n), f(x_n)) + \delta(f(x_n), f(x)) \le$$
$$\le \sup_{u} \delta(f_n(u), f(u)) + \delta(f(x_n), f(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

Teorema . Limite uniforme f di funzioni continue f_z $z \to z_0$ è continuo.
.. Se sono uniformemente continue con tutti i moduli di continuità maggiorati da uno stesso $\omega(\rho)$; $\omega \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$
: tale sarà f.
Se poi sono limitate come singole funzioni allora f sarà limitata, e per z vicino a z_0 le f_z saranno equilimitate

DIM . $\delta(f(x), f(x')) \le \delta(f(x), f_z(x)) + \delta(f_z(x), f_z(x')) + \delta(f_z(x'), f(x'))$
$$\le 2 \sup_{u} \delta(f(u), f_z(u)) + \delta(f_z(x), f_z(x'))$$

dato ε sia R_ε : $\sup_{u} \delta(f(u), f_z(u)) \le \varepsilon$, se $D(z,z_0) \le R$, fissato un tale z sia $\rho_{z,\varepsilon}$: $\delta(f_z(x), f_z(x')) \le \varepsilon$, se $d(x,x') \le \rho_{z,\varepsilon}$: per tali x e x'
$$\delta(f(x), f(x')) \le 3\varepsilon$$

.. Per il secondo punto si osservi che l'ipotesi è $\sup_{z} \sup_{x} \sup_{d(x,x')\le\rho} \delta(f_z(x), f_z(x')) \le \omega(\rho)$

... Infine se le f_z sono limitate $\exists R$ $D(z,z_0) \le R \Rightarrow \sup_{u} \delta(f_z(u), f(u)) \le 1$, per z così:
$\delta(f(u), y_0) \le \delta(f_z(u), y_0) + \delta(f_z(u), f(u))$ passando all'estremo superiore per u
$\sup_{u} \delta(f(u), y_0) \le \sup_{u} \delta(f_z(u), y_0) + \sup_{u} \delta(f_z(u), f(u)) \le M < +\infty$
quindi f è limitata.
Perciò $\sup_{D(z,z_0)\le R} \sup_{u} \delta(f_z(u), y_0) \le \sup_{u} \delta(f(u), y_0) + \sup_{D(z,z_0)\le R} \sup_{u} \delta(f(u), f_z(u)) \le$
$$\le M + 1 \quad \blacksquare$$