Nota: $A \subset X$, $B \subset Z$ $\quad f : A \times B \to (Y, \delta)$ uniformemente continua

(Y, δ) completo

x_0 di accumulazione per A, z_0 di accumulazione per B

1°) $f(x,z) \xrightarrow[z \xrightarrow{B} z_0]{\delta} \lambda(x)$ PUNTUALMENTE IN A $\quad$ 2°) $f(x,z) \xrightarrow[x \xrightarrow{d} x_0]{\delta} \gamma(z)$ PUNTUALMENTE IN B

allora

$$\exists \lim_{x \xrightarrow{d} x_0} \lim_{z \xrightarrow{D} z_0} f(x,z) = \lim_{z \xrightarrow{D} z_0} \lim_{x \xrightarrow{d} x_0} f(x,z) = \lim_{\substack{(x,z) \to (x_0,z_0) \\ d \times_p D}} f(x,z) =: L$$

ovvero $\tilde{f}(x,z) = \begin{cases} f(x,z) & (x,z) \neq (x_0,z_0) \\ L & (x,z) = (x_0 z_0) \end{cases}$ è uniformemente continua

Infatti per la proposizione a pagina 3 del capitolo sulla completezza f si estende ad una funzione uniformemente continua a tutto $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$: $\overline{f} : \overline{A \times B} \to Y$

In particolare $\lambda(x) = \overline{f}(x, z_0)$ e $\gamma(z) = \overline{f}(x_0, z)$. quindi esistono $\lim\limits_{x \xrightarrow{d} x_0} \lambda(x) = \lim\limits_{z \xrightarrow{D} z_0} \gamma(z) = \overline{f}(x_0, z_0) =: \tilde{f}(x_0, z_0)$

Non solo si osserva che l'uniforme continuità di $\overline{f}$ comporta in particolare che

$f(x,z) \to \lambda(x)$ UNIFORMEMENTE IN A $\quad f(x,z) \to \gamma(z)$ UNIFORMEMENTE IN B

cioè

sia $\{f(x, \cdot)\}_{x \in A}$ è equicontinua sia $\{f(\cdot, z)\}_{z \in B}$ lo è.