Scambio tra limiti e operatori definiti da limiti: derivate, integrali...

1) Un primo criterio di scambio tra limiti e derivata

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali derivabili su un intervallo I limitato di estremi $a<b$. Se

i) $f_n' \to g$ $n\to\infty$ UNIFORMEMENTE SU I ii) vi è $t_0 \in I$ $f_n(t_0) \to \lambda \in \mathbb{R}$, $n\to\infty$

allora

i) f_n converge UNIFORMEMENTE SU I cioè vi è $f: I \to \mathbb{R}$: $\sup_{t\in I} |f(t) - f_n(t)| \to 0$, $n\to\infty$.

ii) f è derivabile su I e $f' = g$ cioè

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(t) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)'$$

(A2 Teo. 1.2.4, Oss. 1.2.5 pagine 15-6)

Si tratta ancora di uno scambio di limiti:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{h\to 0} \frac{f_n(t+h)-f_n(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(t+h)-f_n(t)}{h}$$

DIM i) $|f_n(t) - f_m(t)| \leq |(f_n(t) - f_m(t)) - (f_n(t_0) - f_m(t_0))| + |f_n(t_0) - f_m(t_0)| =$

per il teorema di Lagrange $|t-t_0|\,|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| + |f_n(t_0) - f_m(t_0)| \leq |b-a|\,|f_n' - f_m'|_{UNIF} + |f_n(t_0) - f_m(t_0)|$:

essendo gli addendi dell'ultimo termine indipendenti da t (ξ invece no):

$|f_n - f_m|_{UNIF} = \sup_{t\in I} |f_n(t) - f_m(t)| \leq |f_n' - f_m'|_{UNIF}\,|b-a| + |f_n(t_0) - f_m(t_0)|$,

e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy uniformemente. Per completezza ha limite f.

ii) Si usa il criterio generale dato a pagina 6 del capitolo "limiti iterati", alla successione dei rapporti incrementali centro t:

$$R_n(h) = \frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} \qquad 1°)\ R_n(h) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} =: R(h) \quad \text{PUNTUALMENTE per } h\neq 0$$

$$2°)\ R_n(h) \xrightarrow[h\to 0]{} f_n'(t) \quad \text{PUNTUALMENTE per } n\in\mathbb{N}$$

per applicare il criterio va mostrato che la prima convergenza è uniforme, per qualche $\eta>0$, su $0 \neq |h| \leq \eta$. Basta mostrare la condizione di Cauchy uniforme

$$|R_n(h) - R_m(h)| = \left|\frac{(f_n(t+h) - f_m(t+h)) - (f_n(t) - f_m(t))}{h}\right| =_{\text{Lagrange}} |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|$$

$\xi = \xi(h,n,m)$ $\quad \leq |f_n' - f_m'|_{UNIF}$ non dipende da h.

$\sup_h |R_n(h) - R_m(h)| \leq |f_n' - f_m'|_{UNIF}$, ma (f_n') è di Cauchy uniformemente essendo uniformemente convergente

Definizione una $f: I \to (Y, \|\cdot\|)$, I intervallo, $(Y, \|\cdot\|)$ spazio normato si dice derivabile in $t_0 \in I$, rispetto alla norma $\|\cdot\|$, se

$$\exists y_0 \in I \quad f(t) = f(t_0) + y_0 (t - t_0) + R \quad \text{con } \frac{\|R\|}{|t-t_0|} \to 0 \ \ t \to t_0$$

(i.e. $R = o(t-t_0)$ in $\|\cdot\|$ per $t \to t_0$)

Equivalentemente $\exists\ \|\cdot\|\text{-}\lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \ (= y_0)$

Tale limite si dice derivata di f in t_0 e si indica con $f'(t_0)$, $\dot{f}(t_0)$, $\frac{df}{dt}(t_0)$.

Proposizione* (diseguaglianza di Lagrange) data $f: I \to (H, (\cdot)_H)$ derivabile sull'intervallo I e a valori in $(H, (\cdot)_H)$ spazio di Hilbert. Allora

$$\forall t \geq s \quad |f(t) - f(s)|_H \leq |t - s| \sup_{s < \tau < t} |f'(\tau)|_H$$

DIM $|f(t) - f(s)|_H = \left((f(t) - f(s)) \cdot \frac{f(t) - f(s)}{|f(t) - f(s)|} \right)_H$ se $f(t) \neq f(s)$, posto $y = \frac{f(t) - f(s)}{|f(t) - f(s)|_H}$ quindi $|f(t) - f(s)|_H = (f(t) \cdot y)_H - (f(s) \cdot y)_H =$ Lagrange (per la funzione $\tilde{f}(\tau) = (f(\tau) \cdot y)_H$ a valori reali; essa è derivabile poiché per ipotesi $\frac{f(\tau+h) - f(\tau)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{|\cdot|_H} f'(\tau)$, e il prodotto scalare con un prefissato vettore è continuo per Cauchy-Schwarz: $\exists\ \tilde{f}'(\tau) = (f'(\tau) \cdot y)_H$)

$= (t - s)(f'(\xi) \cdot y)_H$ $[s < \xi < t]$ $\leq$ Cauchy-Schwarz $(t - s) |y|_H |f'(\xi)|_H =$

$= (t - s) |f'(\xi)|_H \leq (t - s) \sup\limits_{s < \xi < t} |f'(\xi)|_H$ ∎

Corollario $f: I = [a;b] \to (H, (\cdot)_H)$, I intervallo, f_n derivabili, $(H, (\cdot)_H)$ Hilbert

1°) $f'_n \xrightarrow{H} g$ $n \to \infty$ UNIFORMEMENTE SU I 2°) $\exists t_0 \in I$ $f_n(t_0) \xrightarrow{H} \lambda \in H$ $n \to \infty$. Allora

1°) $f_n \xrightarrow{H} f$ $n \to \infty$ UNIFORMEMENTE SU I 2°) $\exists\ f'(t) = g(t)$ in $(H, (\cdot)_H)$.

DIM 1°) $|f_n(t) - f_m(t)|_H \leq |(f_n(t) - f_m(t) - f_n(t_0) - f_m(t_0))|_H + |f_n(t_0) - f_m(t_0)|_H \leq$ diseguaglianza Lagrange

$\leq (b-a) |f'_n - f'_m|_{UNIF} + |f_n(t_0) - f_m(t_0)|_H$.

2°) $|R_n(h) - R_m(h)|_H \leq$ diseguaglianza Lagrange $|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|_H$ $[\xi$ tra t e $t+h]$ $\leq |f'_n - f'_m|_{UNIF}$ ∎

Nota: se $(H, (\cdot)) = \mathbb{R}^N$ per le diseguaglianze $\max\limits_{1 \leq i \leq N} |y^i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^N |y^i|^2} \leq \sum_{i=1}^N |y^i|$, si ha $f'(t) = (f^{1\prime}(t), \ldots, f^{N\prime}(t))$ e il corollario si ottiene direttamente sulle componenti.

APPROFONDIMENTO

Nota: Se $f_n: I \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ di Banach si ottengono sia la proposizione sia il corollario, va usato il teorema di Hahn-Banach basato sulla completezza:

$\forall y \in Y\ \exists F: (Y, \|\cdot\|_Y) \to \mathbb{R}$ lineare 1-lipschitziano ($|F(v)| \leq \|v\|\ \forall v \in Y$) tale che $\|y\| = F(y)$.

* Se $H = \mathbb{R}^N$ $|f(t) - f(s)| = \left| \left(\int_s^t f^{1\prime}(\tau) d\tau, \ldots, \int_s^t f^{N\prime}(\tau) d\tau \right) \right| = \left| \int_s^t f'(\tau) d\tau \right| \leq \int_s^t |f'(\tau)| d\tau$ 8 ottobre 2015 e pagina 4 ed f' è Riemann integrabile

Corollario Sia $\varphi: A\times I \to (B, |\cdot|)$, I intervallo limitato, $(B, |\cdot|_B)$ di Banach. $A\subset Z$, (Z, D) metrico, z_∞ di accumulazione per A, $\forall z\in A\setminus\{z_\infty\}$ $\varphi(z,t) =: \varphi_z(t)$ sia derivabile in t nella norma $|\cdot|_B$.

1°) $\varphi'_z \xrightarrow{B} g$ $z \xrightarrow{D} z_\infty$ UNIFORMEMENTE SU I
2°) $\exists t_0\in I$ $\varphi_z(t_0) \xrightarrow{B} \lambda\in H$ $z\xrightarrow{D} z_\infty$
$\Longrightarrow$
1°) φ_z converge UNIFORMEMENTE su I, $z\xrightarrow{D} z_\infty$
2°) il suo limite è derivabile e g è la sua derivata

$$|\cdot|_B\text{-}\lim_{z\to z_\infty} \varphi'(z,t) = \left(|\cdot|_B\text{-}\lim_{z\to z_\infty} \varphi(z,t)\right)'$$

DIM È il caso con parametro che vari in uno spazio metrico piuttosto che su $\mathbb{N}$. Ci si riduce al caso di successioni con una sola piccola accortezza. Sia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $z_n\in A$, $z_n\neq z_\infty$, $z_n \xrightarrow{D} z_\infty$: ponendo $f_n(t) = \varphi(z_n, t)$, per cui $f'_n \xrightarrow{B} g$ UNIFORMEMENTE su I $f_n(t_0) \xrightarrow{B} \lambda$, si ottiene dal criterio per le successioni che $f_n(t) = \varphi(z_n,t)$ ha limite f uniforme per $t\in I$ e $f(t_0)=\lambda$, $\exists f' = g$. A priori f dipende dalla successione, ma se $\zeta_n \xrightarrow{H} z_\infty$ $|\varphi(\zeta_n,t) - \varphi(z_n,t)|_B \leq \text{lunghezza } I\cdot|\varphi'_{\zeta_n} - \varphi'_{z_n}|_{UNIF} + |\varphi(\zeta_n,t_0) - \varphi(z_n,t_0)|_B$ ■

Corollario Sia $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori in uno spazio di Banach $(B, |\cdot|_B)$, derivabili su un intervallo limitato I.

1°) $\sum_{h=0}^\infty g'_h$ converge UNIFORMEMENTE su I in norma $|\cdot|_B$
2°) $\exists t_0$ $\sum_{h=0}^\infty g_h(t_0)$ converge in norma $|\cdot|_B$
$\Rightarrow$
1°) $\sum_{h=0}^\infty g_h$ converge UNIFORMEMENTE in I
2°) $\left(\sum_{h=0}^\infty g_h\right)' = \sum_{h=0}^\infty g'_h$

DIM Si pone $f_n(t) = \sum_{h=0}^n g_h(t)$ e si usano i precedenti criteri ■

Del tutto assimilabile è il seguente primo ed elementare criterio di scambio tra derivate ed integrale, vedendo l'integrale come limite di una "serie". Le ipotesi di convergenza uniforme sono assorbite da quelle più forti di uniforme continuità, che permettono una dimostrazione più semplice considerando piuttosto la derivata come limite.

Proposizione $g: J\times I =: [\alpha;\beta]\times[a;b] \to \mathbb{R}$ continua (quindi uniformemente continua) e $\forall (z,t)\in J\times I$ $\exists \frac{d}{dt}g(z,t)$. Se $\forall z$ $\frac{dg}{dt}(z,t)$ è (uniformemente) continua su $J\times I$ allora $\int_\alpha^\beta g(z,t)\,dz$ è derivabile su I e $\frac{d}{dt}\left(\int_\alpha^\beta g(z,t)\,dz\right) = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} g(z,t)\,dz$

DIM Per comodità $[\alpha;\beta]=[0;1]$. Posto $f_n(t) =: \sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n},t)\frac{1}{n}$ si ha $f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 g(z,t)\,dz$, $f'_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{dg}{dt}(z,t)\,dz$.
ora $\left|f'_n(t) - \int_0^1 \frac{dg}{dt}(z,t)\,dt\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\frac{dg}{dt}(\frac{k}{n},t) - \frac{dg}{dt}(z,t)\right)dt\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{|\zeta-z|<\frac{1}{n}}\sup_t \left|\frac{dg}{dt}(\zeta,t) - \frac{dg}{dt}(z,t)\right|\frac{1}{n} =$
$= \sup_{|\zeta-z|<\frac{1}{n}}\sup_t\left|\frac{dg}{dt}(\zeta,t) - \frac{dg}{dt}(z,t)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ per uniforme continuità di $\frac{dg}{dt}$ su $J\times I$ ■

2) Un altro criterio di scambio tra limiti e derivate non direttamente riconducibile al precedente è il seguente

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni derivabili su un intervallo $I=[a;b]$ a valori reali, derivabili in I con f_n' integrabili su I, e g integrabile:

1°) $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ in $|\cdot|_{L^1(I)}$ $\Longrightarrow$ ~~1°) f_n converge UNIFORMEMENTE su I ad una f~~

~~2°) $\exists t_0\in I$ $f_n(t_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda\in\mathbb{R}^N$~~ 2°) Se g è continua in $\bar{t}$ allora $\exists f'(\bar{t})=g(\bar{t})$

DIM Lemma Se φ ha derivata φ' Riemann integrabile $\varphi(t)-\varphi(s)=\int_s^t\varphi'(\xi)d\xi$

(Assomiglia al teorema fondamentale del calcolo ma lì non c'è φ e l'integrando continui)

Dato $\varepsilon>0$ sia $s=\xi_0<\xi_1\ldots<\xi_n=t$: $\sum_{i=0}^{n-1}\sup_{\xi_i\le\tau<\xi_{i+1}}\varphi(\tau)\cdot(\xi_{i+1}-\xi_i)-\varepsilon\le\int_s^t\varphi(\tau)d\tau\le\varepsilon+\sum_{i=0}^{n-1}\inf_{\xi_i\le\tau\le\xi_{i+1}}\varphi(\tau)\cdot(\xi_{i+1}-\xi_i)$.

$$\varphi(t)-\varphi(s)=\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(\xi_{i+1})-\varphi(\xi_i)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varphi(\xi_{i+1})-\varphi(\xi_i)}{\xi_{i+1}-\xi_i}(\xi_{i+1}-\xi_i)=(\text{Lagrange})\sum_{\substack{i=0\\ \xi_i<\eta_i<\xi_{i+1}}}^{n-1}\varphi'(\eta_i)(\xi_{i+1}-\xi_i)=\int_s^t\varphi'(\tau)d\tau\pm\varepsilon \ \blacksquare$$

Si mostra che f_n è di Cauchy uniformemente usando $f_n(t)-f_n(t_0)=\int_{t_0}^t f_n'(\tau)\,d\tau$

~~$|f_n(t)-f_m(t)|\le|f_n(t)-f_n(t_0)-(f_m(t)-f_m(t_0))|+|f_n(t_0)-f_m(t_0)|=$~~

$$=\left|\int_{t_0}^t(f_n'(\tau)-f_m'(\tau))d\tau\right|+|f_n(t_0)-f_m(t_0)|\le\int_{t_0}^t|f_n'(\tau)-f_m'(\tau)|d\tau+|f_n(t_0)-f_m(t_0)|$$

$$\le\ |f_n'-f_m'|_{L^1(I)}+|f_n(t_0)-f_m(t_0)|$$ indipendente da t, quindi

$|f_n-f_m|_{UNIF}\le|f_n'-f_m'|_{L^1(I)}+|f_n(t_0)-f_m(t_0)|$ ed è di Cauchy.

Per completezza di $\mathbb{R}$ e quindi di $(\mathcal{C}([a;b],\mathbb{R}),|\cdot|_{UNIF})$ ha limite f.

Poiché $\left|\int_I f_n'(\tau)d\tau-\int_I g(\tau)d\tau\right|\le|f_n'-g|_{L^1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$\frac{f(t)-f(\bar{t})}{t-\bar{t}}=\frac{1}{t-\bar{t}}\int_{\bar{t}}^t g(\tau)d\tau$ compreso tra $\inf_{\tau\text{ tra }t\text{ e }\bar{t}} g(\tau)$ e $\sup_{\tau\text{ tra }t\text{ e }\bar{t}} g(\tau)$

che per $t\to\bar{t}$ convergono a $g(\bar{t})$ per continuità di g $\blacksquare$

Nota per esercizio si estenda il risultato a funzioni con valori in $\mathbb{R}^N$, a serie di funzioni, e a $\varphi: A\times I\to\mathbb{R}$, $A\subset Z$, (Z,D) metrico.

Nota per aver criteri ancor più maneggevoli conviene prima introdurre criteri di scambio per gli integrali.

Nota l'eliminazione dell'ipotesi di continuità richiede altri concetti e l'integrale di Lebesgue per avere ancora un enunciato significativo.

3)

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni integrabili alla Riemann su $[a;b]=I$
Se $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ UNIFORMEMENTE su I allora 1°) f è integrabile su I

2°) $\exists \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(\tau)d\tau = \int_I (\lim_{n\to\infty} f_n(\tau))d\tau$.

DIM Assumendo che $f=\lim_{n\to\infty} f_n$ sia integrabile, per la diseguaglianza triangolare
$\left|\int_I f(\tau)d\tau - \int_I f_n(\tau)d\tau\right| = \left|\int_I (f(\tau)-f_n(\tau))d\tau\right| \leq \int_I |f_n(\tau)-f(\tau)|d\tau \leq |f_n-f|_{UNIF}\cdot(b-a)$
si ottiene 2°).

Per ottenere l'integrabilità secondo Riemann del limite uniforme va usata la definizione di integrale, e di integrabilità: φ si dice integrabile secondo Riemann
$\inf\{\sum_{i=0}^{K-1} \sup_{[t_i,t_{i+1})}\varphi\cdot(t_{i+1}-t_i) : a=t_0<t_1\cdots<t_N=b\} = \inf_{t_1\ldots t_K} S_\varphi(t_0,\ldots,t_K) =$ (vale sempre $\geq$)

$= \sup_{\tau_1\ldots\tau_M} s_\varphi(\tau_0,\ldots\tau_M) = \sup\{\sum_{i=0}^{M-1}\inf_{[\tau_i,\tau_{i+1})}\varphi\cdot(\tau_{i+1}-\tau_i) : a=\tau_0<\ldots\tau_M=b\}$

e tale valore sarà $\int_a^b \varphi(\tau)d\tau$.

Sia $N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon$ $|f_n-f|_{UNIF}\leq\varepsilon$, si ha data la suddivisione $a=t_0<\cdots<t_M=b$
$\inf_{[t_i,t_{i+1})} f_n - \varepsilon \leq \inf_{[t_i,t_{i+1})} f$; $\sup_{[t_i,t_{i+1})} f \leq \sup_{[t_i,t_{i+1})} f_n + \varepsilon$ $\quad n\geq N_\varepsilon$, moltiplicando per $(t_{i+1}-t_i)$ e sommando su i

$s_{f_n}(t_0\cdots t_M) - \varepsilon(b-a) \leq s_f(t_0\cdots t_M)$; $S_f(t_0\cdots t_M) \leq S_{f_M}(t_0\cdots t_M) + \varepsilon\cdot(b-a)$, passando agli estremi superiori rispettivamente agli estremi superiori variando i $\{t_i\}$ e M:
$\int_a^b f_n(\tau)d\tau - \varepsilon(b-a) \leq \sup_{t_0\ldots t_M} s_f$; $\inf_{t_0\ldots t_M} S_f \leq \int_a^b f_n(\tau)d\tau + \varepsilon(b-a)$, quindi
$0\leq \inf S_f - \sup s_f \leq 2\varepsilon(b-a)$, Essendo ε arbitrario $\exists \int_a^b f(\tau)d\tau$ ∎

Esercizio Si ricavi analogo principio per avere $\int_a^b (\sum_{k=0}^{\infty} g_k(\tau))d\tau = \sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b g_k(\tau)d\tau$.

Corollario Sia $\varphi: A\times[a;b]\to\mathbb{R}$, $A\subset Z$, (Z,D) metrica, z_{oo} di accumulazione per A. Se $\forall z\in A\setminus\{z_{oo}\}$ $\varphi(z,t)=:\varphi_z(t)$ è integrabile, $\varphi_z(t) \xrightarrow[z\to z_{oo}]{} f(t)$ UNIFORMEMENTE per $t\in I$ allora
1°) f è integrabile 2°) $\exists \lim_{z\to z_{oo}} \int_a^b \varphi(z,t)dt = \int_a^b (\lim_{z\to z_{oo}} \varphi(z,t))dt$.

DIM Data $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n\in A\setminus\{z_{oo}\}$, $z_n \xrightarrow{D} z_{oo}$ si pone $f_n(t)=\varphi(z_n,t)$ e si applica il criterio:
1°) è immediato 2°) segue poiché $\lim_{n\to\infty}\int_I \varphi(z_n,\tau)d\tau$ non dipende da $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ∎

Nota al solito le funzioni possono essere a valori in $\mathbb{R}^N$.

Corollario Sia $\varphi : (Z, D) \times_{\mathbb{R}} [a;b] \to \mathbb{R}^N$ uniformemente continua; allora
$J_\varphi(z) = \int_a^b \varphi(z,t)\,dt =: \left(\int_a^b \varphi_1(z,t)\,dt, \dots, \int_a^b \varphi_N(z,t)\,dt\right)$; $J_\varphi : (Z,D) \to \mathbb{R}^N$
è continua uniformemente

DIM $\varphi(z,t) \to \varphi(z_0, t)$ $z \xrightarrow{D} z_0$, UNIFORMEMENTE per $t \in [a;b]$, comunque dato $z_0 \in Z$, per uniforme continuità. Fissato z $\varphi_z(t)$ è continua su $[a;b]$ quindi integrabile. L'uniformità è data da $\left|\int_a^b \varphi(z,t)\,dt - \int_a^b \varphi(\xi,t)\,dt\right| \le \int_a^b |\varphi(z,t) - \varphi(\xi,t)|\,dt \le (b-a) \cdot \omega_\varphi(D(z,\xi))$ ∎

Corollario Sia $\varphi : (Z,D) \times_{\mathbb{R}} [a;b] \to \mathbb{R}^N$ uniformemente continua, allora
i) $\tilde{J}_\varphi(z,x,y) = \int_x^y \varphi(z,t)\,dt$ $\tilde{J}_\varphi : (Z,D) \times [a;b] \times [a;b] \to \mathbb{R}^N$
è continua.
ii) Se φ è limitata $\tilde{J}_\varphi$ è limitata ed uniformemente continua.

DIM $|\tilde{J}_\varphi(z,x,y) - \tilde{J}_\varphi(\xi,u,v)| = \left|\int_x^y \varphi(z,t)\,dt - \int_u^v \varphi(\xi,t)\,dt\right| \le$

$$\le \left|\int_x^y \varphi(z,t) - \int_u^v \varphi(z,t)\,dt\right| + \left|\int_u^v (\varphi(z,t) - \varphi(\xi,t))\,dt\right| \le$$

$$\le \left|\int_x^y \varphi(z,t)\,dt - \int_u^v \varphi(z,t)\,dt\right| + |u-v| \cdot \omega_\varphi(D(z,\xi)) = \left|\int_x^u \varphi(z,t)\,dt + \cancel{\int_u^v \varphi(z,t)\,dt} + \int_v^y \varphi(z,t)\,dt - \cancel{\int_u^v \varphi(z,t)\,dt}\right| + |u-v|\,\omega_\varphi(D(z,\xi))$$

$$\le \left|\int_x^u \varphi(z,t)\,dt\right| + \left|\int_v^y \varphi(z,t)\,dt\right| + |b-a|\,\omega(D(z,\xi)) \le \left|\int_x^u |\varphi(z,t)|\,dt\right| + \left|\int_v^y |\varphi(z,t)|\,dt\right| + |b-a|\,\omega_\varphi(D(z,\xi)) \le$$

$$\le (|u-x| + |y-v|) \max_{a \le \tau \le b} |\varphi(z,\tau)| + |b-a| \cdot \omega_\varphi(D(z,\xi)) \to 0 \text{ per } (\xi,u,v) \to (z,x,y)$$

se poi φ è limitata

$$\le (|u-x| + |y-v|) \sup_{(z,\tau) \in Z \times [a;b]} |\varphi(z,\tau)| + |b-a|\,\omega_\varphi(D(z,\xi)) \to 0 \text{ per } |u-x| + |y-v| + D(z,\xi) \to 0$$

uniformemente in (z,x,y) ∎

Corollario $\tilde{J} : \left(\left(\mathcal{UC}_B((Z,D) \times [a;b]); \mathbb{R}^N\right), |\cdot|_{UNIF}\right) \to \left(\left(\mathcal{UC}_B((Z,D) \times [a;b] \times [a;b]); \mathbb{R}^N\right), |\cdot|_{UNIF}\right)$

$(\tilde{J}\varphi)(z,x,y) = \int_x^y \varphi(z,t)\,dt$ è lipschitziana.

($\mathcal{UC}_B$ sono le funzioni uniformemente continue e limitate)

DIM $|\tilde{J}\varphi - \tilde{J}\psi|_{UNIF} = \sup_{(z,x,y)} \left|\int_x^y (\varphi(z,t) - \psi(z,t))\,dt\right| \le \sup_{(z,x,y)} \left|\int_x^y |\varphi(z,t) - \psi(z,t)|\,dt\right| \le$

$\le |\varphi - \psi|_{UNIF} (b-a)$. È $(b-a)$-lipschitziana ∎

Riportiamo altra dimostrazione della proposizione in calce a pagina 3

Proposizione $g : [\alpha;\beta] \times [a;b] \to \mathbb{R}$, se $\forall z\ \exists \frac{dg}{dt}(z,t)$ uniformemente continua su $[\alpha;\beta] \times [a;b]$ allora $\exists \frac{d}{dt}\left(\int_\alpha^\beta g(z,t)\,dz\right) = \int_\alpha^\beta \frac{dg}{dt}(z,t)\,dz$

DIM $\left|\frac{1}{h}\left(\int_\alpha^\beta g(z,t+h)\,dz - \int_\alpha^\beta g(z,t)\,dz\right) - \int_\alpha^\beta \frac{dg}{dt}(z,t)\,dz\right| \le \int_\alpha^\beta \left|\frac{g(z,t+h) - g(z,t)}{h} - \frac{dg}{dt}(z,t)\right| dz =$ Lagrange $|\tau - t| \le h$

$$= \int_\alpha^\beta \left|\frac{dg}{dt}(z,\tau) - \frac{dg}{dt}(z,t)\right| dz \le \sup_{|\tau - t| \le h} \left|\frac{dg}{dt}(z,\tau) - \frac{dg}{dt}(z,t)\right| \cdot (\beta - \alpha) \to 0,\ h \to 0$$ ∎

4) I criteri dati riguardano funzioni Riemann integrabili e quindi limitate definite su intervalli limitati.
La via maestra per affrontare l'assoluta integrabilità in senso improprio alla Riemann, in particolare in questi casi di limiti di integrali dipendenti da parametro, è l'ampliamento della teoria con l'integrale di Lebesgue

Comunque la regola pratica è: 1°) isolare i punti di singolarità delle integrande con intervallini aperti (in numero finito); 2°) ridursi a intervalli chiusi e limitati "isolando $\pm\infty$" con semirette aperte; 3°) passare al limite rispetto ai parametri negli intervalli chiusi residui ove per definizione le funzioni sono Riemann integrabili; 4°) stimare indipendentemente da parametri, rispetto a cui si fa il limite, gli integrali sui primi intervalli aperti e sulle semirette, cercando di ottenerli infinitesimi (uniformemente rispetto ai parametri del limite) per le lunghezze degli intervalli tendenti a zero e per gli estremi delle semirette tendenti a $+\infty$ o $-\infty$. È chiaro che il punto quarto può essere oltremodo laborioso.

Un caso pratico che è diventato paradigma è quello di "convergenze dominate", in cui il quarto punto viene risolto usando un'unica funzione.

Proposizione (primo criterio di convergenza dominata)

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $\mathbb{R}^N$, assolutamente integrabili alla Riemann in senso improprio su $\mathbb{R}$. Se

1°) $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(t)| \le F(t) \quad \forall t$ con F assolutamente integrabile

2°) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $I_1, \dots I_k$ per cui le singolarità di F siano $\bigcup_{i=1}^{k} \mathring{I}_i$

$f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$ UNIFORMEMENTE per t che varia $\mathbb{R}\setminus(-\infty;a)\cup I_1 \cdots \cup I_k \cup (b;+\infty)$

allora f è assolutamente integrabile e

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) dt$$

Lo si dimostra per funzioni a valori reali.

DIM. Sia $\varepsilon > 0$ e siano $a, b, I_1 \dots I_k$: $0 \le \int_{-\infty}^{a} F(t)\,dt + \int_{I_1} F(t)dt + \dots + \int_{I_k} F(t)dt + \int_{b}^{+\infty} F(t)dt$ sia minore di ε, e $\mathring{I}_1, \dots \mathring{I}_k$ contengano tutte le singolarità di F. Dalle ipotesi e dai precedenti criteri f è assolutamente integrabile, $|f| \le F$.

- Il complementare di $(-\infty;a)\cup I_1 \cdots \cup I_k \cup (b;+\infty)$ è un numero finito di intervalli sui quali (ipotesi di assoluta integrabilità in senso improprio) F è Riemann integrabile,
- Per 1°) le singolarità delle $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono anche esse in $\bigcup_{i=1}^{k} \mathring{I}_i$ quindi sono Riemann integrabili sugli intervalli $J_1, \dots J_{k+1}$ componenti il complementare di $(-\infty;a)\cup I_1 \cup \dots I_k \cup (b;+\infty)$
- Su tali componenti si passa al limite ottenendo il corrispondente integrale di f, i rimanenti integrali saranno piccoli indipendentemente da n:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} (f_n(t) - f(t))\,dt\right| \le \left|\sum_{j=1}^{k+1} \int_{J_j} (f_n(t) - f(t))\,dt\right| + \sum_{i=1}^{k} \int_{I_i} (|f_n(t)| + |f(t)|)\,dt + \int_{-\infty}^{a} |f_n(t)| + |f(t)|\,dt + \int_{b}^{+\infty} |f_n(t)| + |f(t)|\,dt$$

$$\le \left|\sum_{j=1}^{k+1} \int_{J_j} (f_n(t) - f(t))\,dt\right| + 2\int_{(-\infty;a)\cup I_1 \cup \dots \cup I_k \cup (b,+\infty)} F(t)\,dt \le$$

$$\le \left|\sum_{j=1}^{k+1} \int_{J_j} (f_n(t) - f(t))\,dt\right| + 2\varepsilon \qquad \blacksquare$$

Esercizio estendere il risultato per funzioni a valori in $\mathbb{R}^N$

Nota ora sia le f_n che g per definizione hanno un numero finito di singolarità. Ora, che dire di funzioni con infinite singolarità (definendo l'integrale come serie degli integrali sugli intervalli tra due singolarità consecutive, quando ciò sia possibile) per cui è sensato parlare di area dei sottografici? eg. $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x-k}}\chi_{(k;k+\frac{1}{k})}(x)$ (fissato x è una somma finita)

Non conviene proseguire per tale strada (pensare che le singolarità si possono accumulare, e i loro punti di accumulazione a loro volta esser infiniti e accumularsi e così via...)
ma dare la seguente definizione fondamentale per la teoria degli integrali di Lebesgue, che tra l'altro permetterà di trattare integrali di funzioni con infinite singolarità.

Definizione $E\subseteq\mathbb{R}^M$ si dice di MISURA NULLA SECONDO LEBESGUE, se $\forall\varepsilon\ \exists(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di rettangoli M-dimensionali $R_n=[a_1^n;b_1^n]\times\cdots[a_M^n;b_M^n]$ per cui

$$E\subseteq\bigcup_{n=0}^{\infty}R_n\ ,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(b_1^n-a_1^n)\cdot\ldots\cdot(b_M^n-a_M^n)\leq\varepsilon$$

Se $E\subseteq\mathbb{R}$ vuol dire che $\forall\varepsilon\ \exists(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di intervalli
$$E\subseteq\bigcup_{n=0}^{\infty}I_n\quad e\quad \sum_{n=0}^{\infty}\text{lunghezza}(I_n)\leq\varepsilon$$

In altri termini: E può esser ricoperto da M-rettangoli, la serie dei cui "M-volumi" è arbitrariamente piccola.

Definizione Una proprietà $P(x)$ per $x\in\mathbb{R}^M$ si dice vera quasi ovunque se $\{x\in\mathbb{R}^M \mid P(x)$ è falsa$\}$ ha misura nulla.

Nota: gli insiemi numerabili $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, quindi quelli finiti, hanno misura nulla: $I_n\subset B(x_n,\frac{\varepsilon}{2^n})$.
Si può quindi enunciare il seguente criterio che permette di eliminare l'ipotesi di convergenza uniforme. Per la sua dimostrazione conviene aspettare la presentazione dell'integrale di Lebesgue che permette anche un enunciato più generale.

Proposizione (convergenza dominata per l'assoluta integrabilità in senso improprio)
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori in $\mathbb{R}^N$, assolutamente integrabili alla Riemann in senso improprio su $\mathbb{R}$. Se
1°) $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(t)| \leq F(t)$ per quasi ogni t, con F assolutamente integrabile
2°) $f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$ per quasi ogni t f Riemann integrabile sui limitati contenuti nel complementare dell'unione di intorni delle singolarità).
Allora: f è assolutamente integrabile e $\exists \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}} (\lim_{n\to\infty} f_n(t))\,dt$.

DIM Seconda parte del corso.
Nota: l'ipotesi "f è Riemann integrabile..." con l'integrabilità alla Lebesgue sarà non necessaria.

$\boxed{\text{Nota}}$ si osservi che dalla "convergenza dominata" segue anche che $f_n \xrightarrow{L^1} f$, $n\to\infty$ cioè $\int |f_n(t)-f(t)|dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Infatti se $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(t)| \leq F(t)$ si ha $|f(t)| \leq F(t)$ e quindi $|f_n(t)-f(t)| \leq |f_n(t)|+|f(t)| \leq 2F(t)$ e dalla convergenza delle $f_n(t)$ ad $f(t)$ che $|f_n(t)-f(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Va da sé che con questi criteri di convergenza dominata per successioni di funzioni si generalizzano quelli: per parametro generico in uno spazio metrico piuttosto che in $\mathbb{N}$, quelli per scambio tra integrali e serie, di derivazione di limiti di successioni di funzioni derivabili (seguendo quello dato al paragrafo 2) a pagina 4), e quelli di derivazione di un integrale (pagina 3 e pagina 6)...

Corollario $\varphi: A\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $A\subset Z$, (Z,D) metrico, z_∞ di accumulazione per A. Se
1°) $\forall z\in A\setminus\{z_\infty\}$ $\varphi(z,t)=:\varphi_z(t)$ è assolutamente integrabile, $\sup_{z\in A\setminus\{z_\infty\}} |\varphi(z,t)| \leq F(t)$ assolutamente integrabile
2°) $\varphi(z,t) \xrightarrow[z\to z_\infty]{} f(t)$, per quasi ogni t f Riemann integrabile sui limitati contenuti nel complementare dell'unione di intorni delle singolarità (o solo UNIFORMEMENTE nel complementare dell'unione ...)
allora $\exists \lim_{z\to z_\infty} \int_\alpha^\beta \varphi(z,t)dt = \int_\alpha^\beta \lim_{z\to z_\infty} \varphi(z,t)\,dt$
DIM Generalizza quella a pagina 5: la dimostrazione "è la stessa" $f_n(t)=\varphi(z_n,t)$... ∎

Ora si generalizzano i primi due criteri di pagina 6:

Corollario Sia $\varphi:(Z,D)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$, $\forall z\in Z$ $\varphi(z,t)=:\varphi_z(t)$ sia assolutamente integrabile. 1°) $\sup_{z\in Z}|\varphi(z,t)|\le F(t)$ con F assolutamente integrabile;

2°) continuità in una variabile

$\varphi(\zeta,t)\xrightarrow[\zeta\xrightarrow{D}z]{}\varphi(z,t)$ per quasi ogni t (alla peggio UNIFORMEMENTE sul complementare dell'unione di semirette $(-\infty;a)$; $(b;+\infty)$ e intorni delle singolarità di F)

allora

$$\mathcal{I}_\varphi(z)=\int_{\mathbb{R}}\varphi(z,t)\,dt \qquad \mathcal{I}_\varphi:(Z,D)\to\mathbb{R}^N$$

è continua

Corollario Nelle stesse ipotesi $\tilde{\mathcal{I}}_\varphi(z,x,y)=\int_x^y\varphi(z,t)\,dt$ $\tilde{\mathcal{I}}_\varphi:(Z,D)\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^N$ è continua.

DIM $|\tilde{\mathcal{I}}_\varphi(z,x,y)-\tilde{\mathcal{I}}_\varphi(\zeta,u,v)|\le$ (cfr. pag. 6) ... $\le\left|\int_x^u|\varphi(z,t)|dt\right|+\left|\int_v^y|\varphi(z,t)|dt\right|+\left|\int_u^v|\varphi(z,t)-\varphi(\zeta,t)|dt\right|$

$$\le\left|\int_x^u F(t)dt\right|+\left|\int_v^y F(t)dt\right|+\int_{\mathbb{R}}|\varphi(z,t)-\varphi(\zeta,t)|dt\xrightarrow[|x-u|+|y-v|+D(z,\zeta)\to0]{}0$$

e questo per definizione di integrale improprio per i primi due addendi, e per il teorema di convergenza dominata e continuità di $\varphi_t(z)$ per quasi ogni t ∎

Quindi si generalizza la derivazione sotto segno di integrale (pagina e pagina 6, generalizzando la seconda dimostrazione)

Corollario $g:\mathbb{R}\times(a;b)\to\mathbb{R}^N$, a e b in $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$;

• $\forall t\in(a;b)$ $g_t(z)=:g(z,t)$ sia assolutamente integrabile su $\mathbb{R}$,

•• p.q.o. z $\exists\frac{dg}{dt}(z,t)$ tranne un numero finito di $\{t_i\}_{0\le i\le k}$ per cui $\exists\lim_{t\to t_i^\pm}\frac{dg}{dt}(z,t)\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$

••• con tale convenzione si assume che $\forall t\in(a;b)$ $\frac{dg}{dt}(z,t)$ sia assolutamente integrabile

Se $\sup_{t\in(a;b)}\left|\frac{dg}{dt}(z,t)\right|\le F(z)$ con F assolutamente integrabile allora

$$\exists\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}}g(z,t)\,dz\right)=\int_{\mathbb{R}}\frac{dg}{dt}(z,t)\,dz$$

DIM $\frac{1}{h}\left(\int_{\mathbb{R}}g(z,t+h)\,dz-\int_{\mathbb{R}}g(z,t)\,dz\right)=\int_{\mathbb{R}}\frac{g(z,t+h)-g(z,t)}{h}\,dz$ $\varphi_h(z)=:\frac{g(z,t+h)-g(z,t)}{h}$

$\varphi_h(z)\xrightarrow[h\to0]{}\frac{dg}{dt}(z,t)$ per quasi ogni z $\sup_{h:t+h\in(a;b)}|\varphi_h(z)|\le$ (Lagrange) $\sup_{\tau\in(a;b)}\left|\frac{dg}{dt}(z,\tau)\right|\le F(z)$

si può quindi passare al limite sotto segno di integrale ∎

Nota anche qui l'ipotesi •• può esser rinforzata $\frac{g(z,t+h)-g(z,t)}{h}\xrightarrow[h\to0]{}\frac{dg}{dt}(z,t)$ UNIFORMEMENTE per z che vari nel complementare dell'unione di $(-\infty;\alpha)$, $(\beta;+\infty)$ e intorni delle singolarità di F.

Generalizzando il criterio di derivazione del limite di funzioni (paragrafo 2 pagina 4)

Corollario

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori in $\mathbb{R}^N$, su $\mathbb{R}$ continue, derivabili ognuna tranne un numero finito di punti ove esistano i limiti destri e sinistri, eventualmente infiniti, delle derivate, che risultino assolutamente integrabili su $\mathbb{R}$. Se

0°) $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n'(t)| \le F(t)$ $\quad F$ assolutamente integrabile

1°) $f_n'(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(t)$ per q.o. t, e con g Riemann integrabile sui segmenti limitati contenuti nel complementare dell'unione di intorni delle singolarità

(o solo uniformemente sul complementare dell'unione di $(-\infty,a)$, $(b,+\infty)$ e di intorni di punti di singolarità di F)

2°) $\exists\, t_0$ $f_n(t_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}$

allora

1°) f_n converge uniformemente su $\mathbb{R}$ ad f

2°) Se g è continua in $\bar{t}$ $\exists f'(\bar{t}) = g(\bar{t})$.

DIM Per tali f_n' vale $f_n(t) - f_n(s) = \int_s^t f_n'(\tau)\,d\tau$ (cfr. lemma pagina 4)

Come a pagina 4 si ottiene $|f_n(t) - f_m(t)| \le |f_n' - f_m'|_{L^1(\mathbb{R})} + |f_n(t_0) - f_m(t_0)|$

ove come osservato l'ipotesi di convergenza dominata garantisce $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} g$

Quindi f_n è di Cauchy in norma uniforme e avrà limite una f continua per cui $f - f_n$ è limitata per n sufficientemente grande.

Infine $\frac{f(t)-f(\bar{t})}{t-\bar{t}} = \frac{1}{t-\bar{t}} \lim_{n\to\infty} f_n(t) - f_n(\bar{t}) = \frac{1}{t-\bar{t}} \lim_{n\to\infty} \int_{\bar{t}}^t f_n'(\tau)\,d\tau = \frac{1}{t-\bar{t}} \int_{\bar{t}}^t g(\tau)\,d\tau$

$\xrightarrow[t\to\bar{t}]{} g(\bar{t})$ ∎

Nota $f'(\bar{t}) = g(\bar{t})$ non può a priori esser scritto come $(\lim_{n\to\infty} f_n)'(\bar{t}) = \lim_{n\to\infty} f_n'(\bar{t})$ poiché andrebbe mostrato che $f_n'(\bar{t})$ converge a $g(\bar{t})$.

5) Criteri di monotonia (per funzioni a valori reali)

Un'altra famiglia di criteri si hanno per successioni di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che siano successioni crescenti (talvolta anche decrescenti): $f_{n+1}(t) \geq f_n(t)$.
Senz'altro si estende per $\varphi: \times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\varphi(z,t) \geq \varphi(\xi,t)$, $z \geq \xi$
Il seguente lemma da condizioni per la convergenza uniforme

Lemma del Dini Sia (X,d) compatto e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione, monotona in n, di funzioni di $\mathcal{C}((X,d),\mathbb{R})$.
Se $\forall x\in X$ $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ e anche $f\in\mathcal{C}((X,d),\mathbb{R})$ allora $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE.

DIM. • Si suppone $\forall x\in X$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $f_{n+1}(x) \geq f(x)$, per cui $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.
• Conviene usare il criterio di convergenza in spazi metrici per sottosuccessioni, teorema a pagina 9 del capitolo limiti di funzioni, relativamente alla distanza uniforme su $\mathcal{C}_B((X,d),\mathbb{R}) = \mathcal{C}((X,d),\mathbb{R})$ per compattezza di (X,d).
. Data quindi una sottosuccessione $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} =: (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se ne deve trovare un'ulteriore $(g_{k_h})_{h\in\mathbb{N}}$ che converga uniformemente ad f.
• Per Weierstrass per ogni $k\in\mathbb{N}$ vi è $x_k\in X$ per cui
$$\sup_{x\in X}|g_k(x)-f(x)| = \sup_{x\in X}(f(x)-g_k(x)) = \max_{x\in X}(f(x)-g_k(x)) = f(x_k)-g_k(x_k)$$
• Per compattezza vi è $(x_{k_h})_{h\in\mathbb{N}}$, $k_{h+1}>k_h$, vi è $\bar{x}\in X$: $x_{k_h} \xrightarrow{d} \bar{x}$, $h\to+\infty$.
• $$|g_{k_h}-f|_{UNIF} = f(x_{k_h})-g_{k_h}(x_{k_h}) = [f(x_{k_h})-f(\bar{x})]+[f(\bar{x})-g_{k_\nu}(\bar{x})]+[g_{k_\nu}(\bar{x})-g_{k_h}(x_{k_h})] \leq \text{ se } \nu<h$$
$$\leq [f(x_{k_h})-f(\bar{x})]+[f(\bar{x})-g_{k_\nu}(\bar{x})]+[g_{k_\nu}(\bar{x})-g_{k_\nu}(x_{k_h})]$$
dato $\varepsilon>0$ per convergenza puntuale in $\bar{x}$ si fissi ν : $0\leq f(\bar{x})-g_{k_\nu}(\bar{x})\leq\varepsilon$
quindi per continuità di f e di g_ν in $\bar{x}$ vi è $\bar{h}>\nu$: $\forall h\geq\bar{h}$ $|f(x_{k_h})-f(\bar{x})|<\varepsilon$, $|g_{k_\nu}(\bar{x})-g_{k_\nu}(x_{k_h})|<\varepsilon$:
$$|g_{k_h}-f|_{UNIF} = |f_{n_{k_h}}-f|_{UNIF} \leq 3\varepsilon \quad \forall h>\nu$$ ■

Quindi, per il passaggio al limite negli integrali dipendenti da parametro, l'enunciato principe è la seguente versione, adatta all'integrazione secondo Riemann impropria, del "teorema di convergenza monotona di Beppo Levi".

<u>Proposizione</u> Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali:
- monotona crescente $f_{n+1}(t) \geq f_n(t) \quad \forall n, \forall t$
- ed esse siano non negative $f_n(t) \geq 0 \quad \forall n, \forall t$

assolutamente integrabili in senso improprio su $\mathbb{R}$.
Sia $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ e lo si assume
Riemann integrabile sui limitati contenuti nel complementare
dell'unione delle sue eventuali singolarità (per semplicità in numero finito).
Allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt \,,$$

DIM Seconda parte del corso ∎

<u>Nota</u> Se una delle f_n avesse integrale divergente sarebbe ovvia la conclusione.
<u>Nota</u>: l'ipotesi "Riemann integrabile ..." non sarà necessaria con
gli integrali di Lebesgue.
La finitezza delle singolarità di f è messa solo per semplificazione.

<u>Nota</u>: si noti che potrebbe esser $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)dt = +\infty$, nel
qual caso $\exists \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = +\infty$

<u>Nota</u> le ipotesi sono necessarie:
se $f_n \leq 0$ il controesempio è $f_n(t) = -\frac{1}{n} \quad 0 \leq t \leq n$
$f_n(t) \equiv 0$ se $t<0$ o $t>n$: $\int f_n(t) = -1$, $f_n(t) \nearrow 0 \quad n\to\infty$
$\int 0 \equiv 0$.

6) Successioni di successioni

Come osservato una successione $\underline{a}=(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$, può esser visto anche come una funzione costante a tratti definita su $\mathbb{R}$:

$$f_{\underline{a}}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ a_m & m\leq t<m+1 \end{cases} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \chi_{[m,m+1)}(t)$$

(la seconda scrittura si da se a_m sono in uno spazio vettoriale e fissato t. la somma ha un solo addendo: per $m=\bar{t}$ parte intera di t)

Nel caso in cui a_m stia in $\mathbb{R}^M$ si ha quindi nel caso la serie converga o diverga.

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\underline{a}}(t)\,dt = \sum_{m=0}^{\infty} a_m$$

essendo l'integrale da intendersi in senso improprio alla Riemann.

Per le successioni di successioni, ovvero per le successioni di funzioni costanti su intervalli di egual lunghezza, le nozioni di convergenza diventano più stringenti e si riescono a provare agevolmente i criteri di convergenza dominata e di convergenza monotona senza usare alcuna teoria dell'integrazione, ma ispirandosi ad esse per concepire gli enunciati.

Pertanto indichiamo una successione come "vettore" $\underline{a}:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^M$, $\underline{a}=(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e una successione di successioni $(\underline{a}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ anche come successione a due indici $(a_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}}$, e pensandola come successione di funzioni ci si chiede cosa accada al limite degli integrali $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)}$.

Proposizione Sia $(\underline{a}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di successioni

1°) $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_m^{(n)}| \le F_m$ con $\sum_{m=0}^{\infty} F_m < +\infty$ successione in $\mathbb{R}$

2°) $a_m^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} b_m$ $(\underline{b} =: (b_m)_{m\in\mathbb{N}})$

allora $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_m^{(n)}$.

(Le successioni possono essere in un qualsiasi spazio normato)

DIM Come nella dimostrazione del criterio di convergenza dominata si isolano "le code"; qui è più semplice ve n'è uno solo.
Sia $\varepsilon>0$ ed N_ε : $\sum_{m\ge N_\varepsilon} F_m \le \varepsilon$ $(F_m \ge 0\,!)$. Si ha $|b_m| \le F_m$.
Ora sia $\underline{a}^{(n)}$ che $\underline{b}$ danno delle serie assolutamente convergenti in m, ha quindi senso:

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)} - \sum_{m=0}^{\infty} b_m\right| = \left|\sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{(n)} - b_m)\right| \le \left|\sum_{m=0}^{N_\varepsilon -1} (a_m^{(n)} - b_m)\right| + \sum_{N_\varepsilon}^{\infty} |a_m^{(n)}| + |b_m| \le$$
$$\le \left|\sum_{m=0}^{N_\varepsilon -1} (a_m^{(n)} - b_m)\right| + 2\varepsilon$$

essendo il primo addendo dell'ultimo termine una somma finita non dipendendo il numero degli addendi infinitesimi da n, è infinitesimo ∎

Proposizione Sia $(\underline{a}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una successione monotona di successioni
- cioè $a_m^{(n+1)} \ge a_m^{(n)}$ $\forall n, \forall m$.
- ed esse siano non negative $a_m^{(n)} \ge 0$ $\forall n, \forall m$.

allora
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_m^{(n)}$$

DIM. Si ha $0 \le b_m =: \sup_{n\in\mathbb{N}} a_m^{(n)} = \lim_{n\to\infty} a_m^{(n)}$, per monotonia in n $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)}$.
- Caso $\sum_{m=0}^{\infty} b_m = +\infty$ se $\exists \overline{m}$ $b_{\overline{m}} = +\infty$ $\forall K\ \exists n_{K,\overline{m}}$ $\forall n \ge n_K$ $a_{\overline{m}}^{(n)} \ge K$
pertanto per $n \ge n_K$ $\sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)} \ge a_{\overline{m}}^{(n)} \ge K$

Se $\sum_{m=0}^{\infty} b_m = +\infty$, e $\forall m$ $b_m \in \mathbb{R}$, $\forall K$ $\exists M_K$: $\sum_{m=0}^{M} b_m \ge K$, ora quindi
$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)} \ge \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{M} a_m^{(n)} = \sum_{m=0}^{M} \lim_{n\to\infty} a_m^{(n)} \ge K$.

- Se $\sum_{m=0}^{\infty} b_m < +\infty$ si usa il criterio di convergenza dominata ∎

Corollari molto interessanti sono i seguenti (serie di serie).

Corollario Sia $(\alpha_m^h)_{h,m\in\mathbb{N}}$ tale che $\sum_{h=0}^{\infty}|\alpha_m^h| \le F_m$ con $\sum F_m < \infty$

allora $\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m^h = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_m^h$

DIM Porre $a_m^{(n)} = \sum_{h=0}^{n}\alpha_m^h$, $b_m = \sum_{h=0}^{\infty}\alpha_m^h$ e usare la prima proposizione ∎

Corollario Sia $(\alpha_m^h)_{h,m\in\mathbb{N}}$ tali che $\alpha_m^h \ge 0$

allora $\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m^h = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_m^h$

DIM Porre $a_m^{(n)} = \sum_{h=0}^{n}\alpha_m^h$ e usare la seconda proposizione ∎

Esercizio (Serie "triangolari") indicando con l'indice a $\sum$ l'indice di somma, si mostri che $\sum_{h=0}^{n}{}_h\sum_{m=0}^{h}{}_m\alpha_m^h = \sum_{m=0}^{n}{}_m\sum_{h=m}^{n}{}_h\alpha_m^h$.

Come trattare lo scambio di somme per $\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m^h$?

Nota Questi criteri preludono allo scambio di integrali separati di funzioni di due variabili

$$\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(z,t)\,dt\right]dz = \int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(z,t)\,dz\right]dt$$

Grazie al fatto che per φ continua $\int_0^1\varphi(t)dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(\frac{k}{n})\frac{1}{n}$, si prova agevolmente

Proposizione Se f è continua in $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ allora

$$\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(z,t)\,dt\right]dz = \int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(z,t)\,dz\right]dt.$$

TRACCIA $\int_0^1\left[\int_0^1 f(z,t)\,dt\right]dz = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{h=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{h}{m},\frac{k}{n})\frac{1}{n}\frac{1}{m} \ldots$