Lezioni del 5 e 6 novembre

1) Derivate e cammini

Proposizione: Sia $\mathcal{B}: \underbrace{V^{(1)}\times\dots\times V^{(k)}}_{k\text{ volte}} \to W$ una funzione k-lineare continua $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(k)}: I \to V^{(i)}$ cammini derivabili. Allora

$$\exists \left(\mathcal{B}(\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(k)}(t))\right)' = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{B}(\dots \gamma^{(i)\prime}(t) \dots)$$

DIM Indichiamo come prodotto "in blocco" $\mathcal{B}(u^{(1)}\dots u^{(k)}) = u^{(1)}\circ\dots\circ u^{(k)}$.
Induzione su k l'idea è aggiungere e togliere un prodotto con uno dei fattori non incrementato.

$k=2$ $\quad \dfrac{\gamma^{(1)}(t+h)\circ\gamma^{(2)}(t+h) - \gamma^{(1)}(t)\circ\gamma^{(2)}(t)}{h} =$

$$= \frac{\gamma^{(1)}(t+h)\circ\gamma^{(2)}(t+h) - \gamma^{(1)}(t+h)\circ\gamma^{(2)}(t) + \gamma^{(1)}(t+h)\circ\gamma^{(2)}(t) - \gamma^{(1)}(t)\circ\gamma^{(2)}(t)}{h} =$$

bilinearità
$$= \gamma^{1}(t+h)\circ\frac{[\gamma^{(2)}(t+h)-\gamma^{(2)}(t)]}{h} + \frac{[\gamma^{(1)}(t+h)-\gamma^{(1)}(t)]}{h}\circ\gamma^{(2)}(t)$$

passando al limite per $h\to 0$ per continuità

$$\longrightarrow \gamma^{(1)}(t)\circ\gamma^{(2)\prime}(t) + \gamma^{(1)\prime}(t)\circ\gamma^{(2)}(t)$$

Passo induttivo

$$\frac{1}{h}\left\{\gamma^{(1)}(t+h)\circ\dots\circ\gamma^{(k)}(t+h)\circ\gamma^{(k+1)}(t+h) - \gamma^{(1)}(t)\circ\dots\circ\gamma^{(k)}(t)\circ\gamma^{(k+1)}(t)\right\} =$$

k linearità
$$= \gamma^{(1)}(t+h)\circ\dots\circ\gamma^{(k)}(t+h)\circ\frac{[\gamma^{(k+1)}(t+h)-\gamma^{(k+1)}(t)]}{h} + \frac{[\gamma^{(1)}(t+h)\circ\dots\circ\gamma^{(k)}(t+h) - \gamma^{(1)}(t)\circ\dots\circ\gamma^{(k)}(t)]}{h}\circ\gamma^{(k+1)}(t)$$

passando al limite per $h\to 0$ per continuità nel primo addendo e anche per ipotesi induttiva nel secondo

$$\longrightarrow \gamma^{(1)}(t)\circ\dots\circ\gamma^{(k)}(t)\circ\gamma^{(k+1)\prime}(t) + \left(\sum_{i=1}^{k}\dots\circ\gamma^{(i)\prime}(t)\circ\dots\right)\circ\gamma^{(k+1)}(t)$$

Esempi

- Cammini di matrici $A: I \to \mathcal{M}(M\times N) \sim \mathbb{R}^{MN}$, $B: I\to\mathcal{M}(N\times H)\sim\mathbb{R}^{NH}$
  $\mathcal{B}(A,B) = A\cdot B$ prodotto righe per colonne $\mathcal{B}: \mathcal{M}(M\times N)\times\mathcal{M}(N\times H)\to\mathcal{M}(M\times H)\sim\mathbb{R}^{MH}$
  $(A\cdot B)' = A'B + AB'$
- $\gamma, \varphi: I\to\mathbb{R}^3$ $\quad \gamma\times\varphi = \mathcal{B}(\gamma,\varphi)$ $\quad \mathcal{B}: \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $\quad \begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}U_2V_3-V_2U_3\\V_1U_3-U_1V_3\\U_1V_2-V_1U_2\end{pmatrix}$
  $(\gamma\times\varphi)' = \gamma'\times\varphi + \gamma\times\varphi$
- $\gamma,\varphi: I\to\mathbb{R}^N$ $\quad (\gamma\cdot\varphi) = \mathcal{B}(\gamma,\varphi)$ $\quad \mathcal{B}: \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ $\quad (\gamma\cdot\varphi)' = (\gamma'\cdot\varphi) + (\gamma\cdot\varphi')$

Conseguenza $(|\gamma|^2)' = 2(\gamma\cdot\gamma')$, $\quad |\gamma|' = \dfrac{\gamma\cdot\gamma'}{|\gamma|}$

• Prodotto scalare euclideo tra matrici : $A \in \mathcal{M}(M,N)$, $B \in \mathcal{M}(M,N)$

$\mathcal{M}(M,N) \simeq \mathbb{R}^{M \cdot N}$, $A = (A^j_i)_{\substack{1\le i\le M\\1\le j\le N}}$, $B = (B^j_i)_{\substack{1\le i\le M\\1\le j\le N}}$ INDICE DI RIGA IN BASSO INDICE DI COLONNA IN ALTO

$$A \bullet B = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} A^j_i B^j_i = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} A^j_i ({}^tB)^i_j = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{M} ({}^tB)^i_j A^j_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} ({}^tBA)^j_j = \operatorname{tr} {}^tBA = \operatorname{tr} {}^tAB$$

$({}^tBA)^j_i = \sum_{h=1}^{M} ({}^tB)^h_i A^j_h$. Passando a curve di matrici

$$(A \bullet B)' = A' \bullet B + A \bullet B' = \operatorname{tr} {}^tBA' + \operatorname{tr} {}^tAB'$$

• $M : I \to \mathcal{M}(N \times N) \sim \mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^N$ $\quad M = (M^1 \cdots M^N)$ $\quad M^i$ i-a colonna

$$\mathcal{B}(M^1, \ldots, M^N) = \det M \qquad \mathcal{B} : \mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

$$(\det M)' = \sum_{i=1}^{N} \det(\ldots M^{i\,\prime} \ldots) \quad \text{per la proposizione generale}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} M^{i\,\prime}_j \cdot (-1)^{i+j} \det \left(\overset{*i}{M}{}_{*j} \right) \quad \text{per sviluppo del determinante}$$

ove $\overset{*i}{M}{}_{*j}$ è la matrice $(N-1)\times(N-1)$ ottenuta da M togliendo la j-a riga e la i-a colonna $\quad (\operatorname{cof} M)^i_j := (-1)^{i+j} \det \overset{*i}{M}{}_{*j}$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} M^{i\,\prime}_j \cdot (\operatorname{cof} M)^i_j = \operatorname{cof} M \bullet M' = \operatorname{tr} (\operatorname{adj} M) \cdot M'$$

l'aggiunta di M è per definizione la trasposta di $\operatorname{cof} M$

$$(\operatorname{adj} M)^j_i = (\operatorname{cof} M)^i_j = (-1)^{i+j} \det \overset{*i}{M}{}_{*j}$$

Quindi

$$(\det M)' = \operatorname{tr} (\operatorname{adj} M) \cdot M'$$

pertanto se $\det M \neq 0$

$$(\det M)' = \det M \, (\operatorname{tr} M^{-1} M')$$

- Moti piani di rotazione

$P(t) = M(t)\,P_0$ è una rotazione attorno all'origine nello spazio

se $M : I \to \mathcal{M}(3\times 3)$ e

$M \cdot {}^t M = Id$

$Mv = v \quad |v| = 1$ versore dell'asse di rotazione fisso

Derivando le relazioni

$M' \cdot {}^t M + M {}^t M' = 0 \quad M' \, {}^t M$ è antisimmetrica.

$M' v = \underline{0}$

Sia $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$ il vettore di velocità angolare $\Omega = \pm \omega v$

$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice antisimmetrica ad esso associata come fattore di prodotto vettoriale;

$\Omega \times P = \tilde{\Omega} \cdot P$.

Ora

$P'(t) = M'(t) \cdot P_0$

$P'(t) = \Omega(t) \times P(t) = \tilde{\Omega}(t) \cdot M(t)\,P_0$

per ogni posizione iniziale nel piano di rotazione

per decomposizione $M' w = \tilde{\Omega}\, M(t)\, w$ per ogni w nello spazio

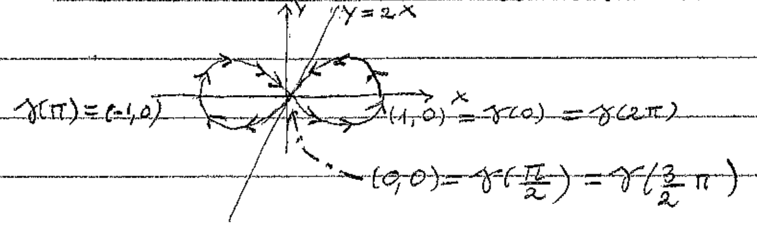
quindi

$\tilde{\Omega}(t)\, M(t) = M'(t)$ per ortonormalità

$$\tilde{\Omega} = M' \, {}^t M$$

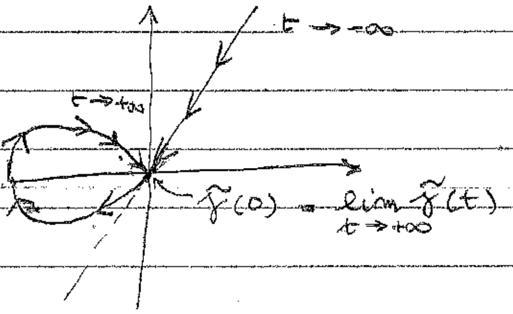
2) La nozione di 1-varietà in $\mathbb{R}^N$

Partendo dal cammino $(\cos t, \sin 2t)$ $0 \le t \le 2\pi$: $\gamma(t)$



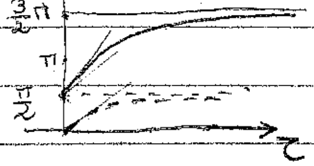
(che pur avendo derivate $(-\sin t, 2\cos 2t)$ mai nulle ha sostegno che in un intorno di $(0,0)$ non può esser mai grafico di una funzione con dominio una qualsiasi retta del piano; in $(0,0)$ vi sono due versori tangenti indipendenti!)

si vuol costruire un cammino con derivate continue che abbia il seguente comportamento:



essendo quindi
- semplice (iniettivo)
- non chiuso
- con derivata non nulla continua (le sue restrizioni ad intervalli chiusi limitati daranno univocamente ai loro sostegni un versore tangente)

Si tratta di cambiare la parametrizzazione (cambiare la scala temporale) $t = t(\tau)$ in modo da usare γ per i $\tau \ge 0$, con $t(0) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{\tau \to +\infty} t(\tau) = \frac{3}{2}\pi$,
e per $\tau \le 0$ usare $\lambda(\tau, 2\tau)$ per λ opportuno.
Un $t = t(\tau)$ con tale comportamento è



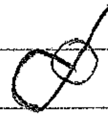
$$t(\tau) = \frac{\pi}{2} + 2\arctan\tau \qquad \tau \ge 0$$

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \begin{cases} (\lambda\tau, 2\lambda\tau) & \tau \le 0 \\ \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\arctan\tau\right), \sin(\pi + 4\arctan\tau)\right) & \tau \ge 0 \end{cases}$$

$\tilde{\gamma}(0^-) = (0,0) = \tilde{\gamma}(0^+)$
$\tilde{\gamma}'(0^-) = (\lambda, 2\lambda)$; $\tilde{\gamma}'(0^+) = (-2,-4)$
$\lambda = -2$

Dunque $\tilde{\gamma}(\tau) = \begin{cases} (2\tau, -4\tau) & \tau \leq 0 \\ (-\sin(2\arctan\tau); -\sin(4\arctan\tau)) & \tau \geq 0 \end{cases}$

è continuo, con derivata continua non nulla, iniettivo, eppure la sua immagine non corrisponde all'idea intuitiva di curva avente nel punto $(0,0)$ non ben identificata la tangente.

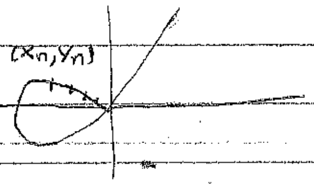


tant'è che intorno a $(0,0)$ non può esser visto come grafico di una funzione reale di una variabile

Dov'è il problema? Essendo iniettivo esso ha un'inversa

$\tilde{\gamma}^{-1} : \operatorname{Im}\tilde{\gamma} \to \mathbb{R}$

il punto è che la sua inversa non è continua!



prendiamo una successione di punti (x_n, y_n) nell'immagine nel secondo quadrante che convergano a $(0,0) = \tilde{\gamma}(0)$

$\tilde{\gamma}^{-1}(x_n, y_n) = t_n \in \mathbb{R}$ per cui $\tilde{\gamma}(t_n) = (x_n, y_n)$

ma $t_n \to +\infty$

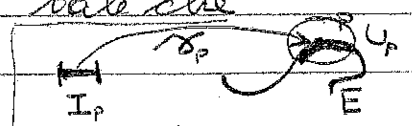
cioè in particolare $\tilde{\gamma}^{-1}(x_n, y_n) \not\to 0 = \tilde{\gamma}^{-1}(0,0)$.

Definizione $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice 1-varietà C^1 in $\mathbb{R}^N$ se $\forall p \in E$ $\exists U_p$ intorno di p $\exists \gamma_p : I_p \to \mathbb{R}^N$ cammino tale che

① $\operatorname{Im}_I \gamma_p = E \cap U$

② $\forall t \in I \ \exists \gamma_p'(t) \neq 0$ e continua

③ $\gamma_p^{-1} : E \cap U \to I$ è continua



γ si dice PARAMETRIZZAZIONE LOCALE

γ^{-1} si dice COORDINATA LOCALE

Ciò in particolare comporta che in $p \in E$ non vi sono diversi "rami" di E che confluiscono.

Infatti

Proposizione Sia $f: I \to \mathbb{R}^{N-1}$ una funzione derivabile allora il cammino che da il grafico di f:

$$\gamma(t) = (t, f(t)) \quad \gamma: I \to \mathbb{R}^N$$

è semplice, con derivata mai nulla, e con γ^{-1} continua.
Se f è C^1 il grafico di f come sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ sarà in particolare una 1-varietà in $\mathbb{R}^N$ con una sola parametrizzazione locale.

DIM che γ sia semplice è immediato, $\gamma'(t) = (1, f'(t)) \neq \underline{0}_{\mathbb{R}^N}$
Infine γ^{-1} è la restrizione a $\mathrm{Im}\,\gamma = \mathrm{Graf}\, f$ della proiezione sul primo asse.

Vale il viceversa almeno "localmente"

Teorema del rango baby.

Proposizione Sia $\gamma: I \to \mathbb{R}^N$ un cammino con derivata continua
Se $\gamma'(t_0) \neq \underline{0}$ allora $\exists \delta$ $\underset{[t_0-\delta;\, t_0+\delta]}{\mathrm{Im}}\,\gamma$ è un grafico.

(Nota nulla si dice su $\underset{I}{\mathrm{Im}}\,\gamma$ che può presentare strani comportamenti)

DIM Essendo $\gamma'(t_0) \neq 0$ $\exists i : \gamma_i'(t_0) \neq 0$. Essendo γ' continua
$\exists \delta : \gamma_i'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (t_0-\delta; t_0+\delta)$.
Ma allora $\gamma_i : (t_0-\delta; t_0+\delta) \to \mathbb{R}$ è invertibile su $\underset{t_0-\delta,\, t_0+\delta}{\mathrm{Im}}\,\gamma_i =: J$ che è un intervallo. Considerato come parametro $s = \gamma_i(t)$

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\gamma_i^{-1}(s)) = (\gamma_1(\gamma_i^{-1}(s)), \ldots, s, \ldots \gamma_N(\gamma_i^{-1}(s)))$$

$\tilde{\gamma}: J \to \underset{(t_0-\delta,\, t_0+\delta)}{\mathrm{Im}}\,\gamma$ quindi $\underset{(t_0-\delta,\, t_0+\delta)}{\mathrm{Im}}\,\gamma$ è il grafico

di $f: J \to \mathbb{R}^N$ $f(s) = (\gamma_1(\gamma_i^{-1}(s)), \ldots \gamma_{i-1}(\gamma_i^{-1}(s)), \gamma_{i+1}(\gamma_i^{-1}(s)), \ldots \gamma_N(\gamma_i^{-1}(s)))$

Corollario Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è una 1-varietà allora "localmente è il grafico di una funzione C^1": $\forall P \; \exists U_P \; E \cap U_P$ è un grafico.

Proposizione

Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$

semplice non chiusa con derivate continue (mai nulla)
se $I = [a; b]$ è chiuso e limitato allora
$\operatorname{Im}_I \gamma$ è una 1-varietà con un'unica parametrizzazione locale.

DIM Perché $[a, b]$ è compatto, γ è continua
γ trasforma compatti in compatti
(cfr. Note sulla sequenziale compattezza pagina 3)
ma i compatti di $[a, b]$ sono i chiusi di $[a, b]$
(cfr. ibidem pagina 2)
Quindi γ trasforma chiusi in chiusi di $\mathbb{R}^N$
(cfr. ibidem pagina 3)
Ma γ è iniettiva quindi invertibile:
γ^{-1} ha come preimmagine di un chiuso di $\mathbb{R}^N$
un chiuso di $[a; b]$. Quindi è continua.
(cfr. Teoremi ponte pagina 2 prima proposizione punto vii)

$\forall p \quad \gamma_p \equiv \gamma \quad , I_p \equiv [a, b], \; U_p = \mathbb{R}^N$ ∎

Corollario

Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$

una curva semplice chiusa con derivate continue
(mai nulla) allora $\operatorname{Im}_I \gamma$ è una 1-varietà.

DIM Per ipotesi $I = [a; b]$ è chiuso e limitato. Sia $c \in (a; b)$
dato $0 \lneq \varepsilon \lneq c-a, b-c$, i due cammini semplici non chiusi
$\tilde{\gamma} = \gamma|_{[a; c+\varepsilon]}$ $\tilde{\tilde{\gamma}} = \gamma|_{[c-\varepsilon, b]}$ sui rispettivi domini

danno le due parametrizzazioni locali che sono
adatte per ogni $p \in \operatorname{Im}_I \gamma$ ∎

Definizione. Si dice orientazione di una 1-varietà $E \subseteq \mathbb{R}^N$ una mappa $T: E \to \partial B_{\mathbb{R}^N}(0,1)$ CONTINUA

- Data un'orientazione ve ne è solo un'altra $-T$

- Un cammino γ semplice regolare con γ^{-1} continuo ha come orientazione

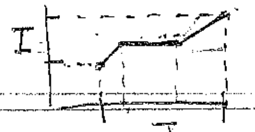
$$\left(T(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right) \quad T(P) = \frac{\gamma'(\gamma^{-1}(P))}{|\gamma'(\gamma^{-1}(P))|} \quad P \in \mathrm{Im}\,\gamma$$

Si noti che $\tilde{T}(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ se γ è regolare

è sempre definito ed è continuo in t.
Ma $T(P) = \tilde{T}(\gamma^{-1}(P))$ non è detto sia continuo se non lo è γ^{-1}.

Nel seguito si danno definizioni di concetti e proprietà già usate ripetutamente pur senza denominarle. Si farà eventualmente riferimento al libro di Paolo Acquistapace, il volume di Analisi 2, a cui ci si riferisce con la sigla A2.

Definizione. Si dice che un cammino $\tilde{\gamma}: J \to \mathbb{R}^N$ è una riparametrizzazione di $\gamma: I \to \mathbb{R}^N$ se vi è $h: J \to I$ continua e monotona per cui $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(h(s))$. In particolare hanno la stessa immagine.

Osservazione: questo cambio della scala dei tempi permette "fermate", cioè h può non essere invertibile: 

. Se h è crescente (debolmente) i due cammini hanno lo stesso verso di percorrenza dell'immagine.

Definizione. Un cammino $\gamma: I \to \mathbb{R}^N$ si dice C^K $K \in \mathbb{N}$ se ha K derivate successive continue

- Un cammino si dice "regolare" se è C^1 e $\gamma' \neq 0$ sempre.

(A2 Def. 4.1.2 pag. 303)

- Un cammino $\gamma: I \to \mathbb{R}^N$ si dice C^K a tratti, risp. regolare a tratti se vi è una suddivisione di I intervalli adiacenti $I_1, \dots I_k$ per cui $\gamma|_{I \cap I_i}$ è C^K, risp. regolare.

(A2 Def. 4.1.2 pag. 303)

Definizione Si dice sostegno di un cammino $\gamma: I \to V$ la sua immagine $\gamma(I) = \underset{I}{\mathrm{Im}}\,\gamma = \{x \in V : \exists t \in I\ \gamma(t) = x\}$

(A_2 Def. 4.1.2 pag. 302)

Definizione. Due cammini $\gamma: I \to \mathbb{R}^N$, $\tilde{\gamma}: J \to \mathbb{R}^N$ si dicono C^k equivalenti se vi è
$h: J \to I$ C^k, invertibile con inverso C^k per cui $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(h(s))$

- Due cammini chiusi $\gamma: I \to \mathbb{R}^N$, $\tilde{\gamma}: J \to \mathbb{R}^N$ si dicono C^k equivalenti a tratti se
  - vi sono I_1 e I_2 intervalli $\mathring{I}_1 \cap \mathring{I}_2 = \phi$ $I_1 \cup I_2 = I$, I_1 precede I_2
  vi sono J_1 e J_2 intervalli $\mathring{J}_1 \cap \mathring{J}_2 = \phi$ $J_1 \cup J_2 = J$, non necessariamente ordinati
  - $\gamma|_{I_1 \cap I}$ è equivalente a $\tilde{\gamma}|_{J_1 \cap J}$
  e
  $\gamma|_{I_2 \cap I}$ è equivalente a $\tilde{\gamma}|_{J_2 \cap J}$.

(A2 Def. 4.1.4 pag. 304)

Osservazione: l'equivalenza a tratti tra cammini chiusi $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^N$, $\tilde{\gamma}: [c,d] \to \mathbb{R}^N$ significa semplicemente che le due estensioni rispettivamente $(b-a)$-periodica di γ e $(d-c)$-periodica di $\tilde{\gamma}$ a tutto $\mathbb{R}$

$$\pi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \quad , \quad \tilde{\pi}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$$

hanno due restrizioni ad opportuni intervalli di periodicità che sono equivalenti.

- Tale definizione è utile per il seguente teorema che non viene qui dimostrato.

Teorema (A2 Prop. 4.2.1 pag. 313-14)

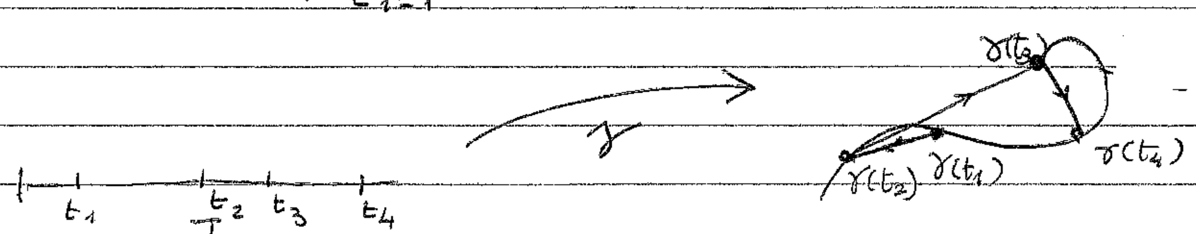
- Due curve semplici regolari non chiuse sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso sostegno
- Due curve semplici regolari e chiuse sono equivalenti a tratti se e solo se hanno lo stesso sostegno

Definizione Due cammini γ e $\tilde{\gamma}$ si dicono C^k equivalenti a tratti fissi se vi sono $I_1, \dots I_k$ consecutivi adiacenti che suddividono I $\gamma: I \to \mathbb{R}^N$ e $J_1, \dots, J_k$ consecutivi adiacenti che suddividono J $\tilde{\gamma}: J \to \mathbb{R}^N$ in modo che $\gamma|_{I_j \cap I}$ è C^k equivalente a $\tilde{\gamma}|_{J_j \cap J}$.

3) Lunghezza di un cammino

Definizione Sia $\gamma: I \to (X,d)$ I intervallo, (X,d) spazio metrico un cammino (continuo). Si definisce lunghezza del cammino

$$\ell(\gamma) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{K-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) : K\in\mathbb{N},\ t_1 < \dots < t_K \text{ suddivisione di } I\right\}$$



(A2 Def. 4.1.7. pag. 307)

Osservazione: tale nozione a livello intuitivo **non** da una nozione di "lunghezza" del sottoinsieme di X: $\underset{I}{\mathrm{Im}}\,\gamma$ ma da una nozione di "lunghezza" delle strade fatte sui camminando

Esempio

$\gamma: [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (t^2, 0)$ $\underset{[-1,1]}{\mathrm{Im}}\,\gamma = [0,1]\times\{0\}$

ma $\ell(\gamma) = 2$ poiché $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$

$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = d((1,0),(0,0)) = 1$

$d(\gamma(t_2), \gamma(t_3)) = d((0,0),(1,0)) = 1$

e per ogni suddivisione, essendo $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_K)$ allineati si ha $\sum_{i=1}^{K-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = \sum_{i: t_{i+1}\leq 0} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + \sum_{i: t_i \geq 0} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$

$= |\gamma(t_{h+1}) - \gamma(t_1)| + |\gamma(t_{h+2}) - \gamma(t_K)| \leq 2$

Per calcolare quindi "la lunghezza della strada fatta" da un cammino più praticamente si ha il seguente teorema:

Teorema (A2 Teo 4.1.8 pag 308-9, Oss. 4.2.2 pag. 314

Sia $\gamma: I \to \mathbb{R}^N$ un cammino C^1 a tratti sui tratti $I_1, \dots, I_h$

$$\ell(\gamma) = \sum_{j=1}^{h} \int_{I_j} |\gamma'(t)|\,dt$$

Osservazione. l'idea intuitiva è che:

i $|\gamma'(t)|dt$ sono le "lunghezze infinitesime" degli "elementi infinitesimi di spostamento",

i $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$ le lunghezze degli "elementi discreti di spostamento"

"Sommando" in diverso modo le grandezze "continue" e quelle "discrete" si otterrà la stessa quantità.

Osservazione. si può provare che un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$ compatto che sia una 1-varietà è unione finita disgiunta di sostegni di cammini regolari semplici (sostegni di parametrizzazioni locali). È cioè sostegno di un cammino semplice regolare a tratti.

- Quindi una uno-varietà in $\mathbb{R}^N$ sarà unione numerabile disgiunta di sostegni di cammini regolari semplici.
- Nella pratica del calcolo ciò è spesso immediato e quindi non necessita dimostrazione astratta generale.

Definizione. Se $\gamma: I \to \mathbb{R}^N$ è regolare a tratti e $l(\gamma) < +\infty$ si dirà che è rettificabile

- Se $\gamma: I \to \mathbb{R}^N$ è regolare a tratti e semplice si pone $l(\mathrm{Im}_I\, \gamma) = l(\gamma)$
- Se E è una 1-varietà di $\mathbb{R}^N$ in vista della precedente osservazione si pone $l(E) = \sum_{h=1}^{\infty} l(\gamma_h)$, γ_h cammini regolari semplici, per cui E è unione disgiunta dei loro supporti.

Nota Per cammini C^1 a tratti scriveremo $\int_I |\gamma'(t)|dt$ per $\sum_{j=1}^{q} \int_{I_j} |\gamma'(t)|dt$.

Osservazione. dal teorema precedente si ha che $l(\gamma) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_I |\gamma'(t)|dt$ è indipendente dalla parametrizzazione, in particolare: se γ e $\tilde{\gamma}$ sono C^1equivalenti allora $l(\gamma) = l(\tilde{\gamma})$,

• Ciò si può ottenere indipendentemente dal teorema (A2 Oss 4.1.9 pag 309)

<u>Proposizione</u> Se $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^N$, $\tilde{\gamma}:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}^N$ sono C^1 e $\tilde{\gamma}(s)=\gamma(h(s))$ con $h:(\alpha;\beta)\to(a;b)$ C^1, monotona allora $\ell(\tilde{\gamma})=\ell(\gamma)$.

DIM $\frac{d}{ds}\tilde{\gamma}(s)=\frac{d\gamma}{dt}(h(s))\cdot\frac{dh}{ds}(s)$, supponiamo $\frac{dh}{ds}(s)\geq 0$ (h crescente)

$$\int_\alpha^\beta\left|\frac{d}{ds}\tilde{\gamma}(s)\right|ds=\int_\alpha^\beta\left|\frac{d\gamma}{dt}(h(s))\right|\frac{dh}{ds}(s)\,ds = \text{cambio di variabile} \quad \begin{array}{l} t=h(s)\\ dt=\frac{dh}{ds}(s)ds\\ a=h(\alpha),\ b=h(\beta)\end{array}$$

$$=\int_a^b\left|\frac{d\gamma}{dt}(t)\right|dt$$

nel caso $\frac{dh}{ds}(s)\leq 0$, $a=h(\beta)$, $b=h(\alpha)$ e $\left|\frac{dh}{ds}\right|=-\frac{dh}{ds}$ ∎

<u>Osservazione</u> • Vi sono cammini definiti su illimitati ma con lunghezza finita!

$\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ $\quad\gamma(t)=(\arctan t,\ 0)$ $\quad\ell(\gamma)=\pi$

• I cammini C^1 su $[a;b]$ sono invece sempre rettificabili.

• I cammini non C^1 ovvero definiti su un intervallo non chiuso possono avere lunghezza infinita

$$\gamma(t)=\begin{cases}(0;0) & t=0\\ (2t;\ t^2\sin\frac{1}{t^2}) & t\in(0,1]\end{cases}\quad \exists\lim_{h\to0^+}\frac{\gamma(h)}{h}=(2,0)=\gamma'(0)$$

$$\gamma'(t)=\left(2,\ 2t\sin\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}\cos\frac{1}{t^2}\right)\underset{t\to0^+}{\not\to}\gamma'(0)$$

$$\ell(\gamma)=\int_0^1\sqrt{4+4t^2\sin\frac{1}{t^2}-4\sin\frac{2}{t^2}+\frac{4}{t^2}\cos\frac{1}{t^2}}\,dt \geq \left[4-4\sin\frac{2}{t^2}\geq 0\right]$$

$$\geq\int_0^1\sqrt{\frac{4}{t^2}\cos\frac{1}{t^2}}\,dt=2\int_0^1\frac{|\cos\frac{1}{t^2}|}{t}dt\overset{\frac{1}{t^2}=s}{=}\int_0^1 t^2\left|\cos\frac{1}{t^2}\right|\frac{2\,dt}{t^3}=$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{s}|\cos s|\,ds\geq\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{1}{s}|\cos s|ds=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi}\frac{|\cos s|}{s}ds\geq\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}|\cos s|ds\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi}=+\infty$$

4) Ascisse curviline (parametro di lunghezza d'arco o coordinata di lunghezza d'arco)

Definizione. Sia $\gamma: I \to \mathbb{R}^N$ un cammino C^k a tratti, $t_0 \in I$ si dice lunghezza d'arco a partire da t_0

$$s = \lambda(t) = \int_{t_0}^{t} |\gamma'(\tau)| d\tau \qquad t \in I \quad \lambda: I \to \mathbb{R}$$

(A2 pag. 312)

Osservazione: • $\lambda: \mathring{I} \longrightarrow \left(-\int_{\inf I}^{t_0} |\gamma'(\tau)| d\tau ; \int_{t_0}^{\sup I} |\gamma'(t)| dt\right) = \left(-\int_{\inf I}^{t_0} |\gamma'| ; \ell(\gamma) - \int_{\inf I}^{t_0} |\gamma'|\right)$ è surgettiva.

• Con $\int_{t_0}^{t} |\gamma'(\tau)| d\tau$ si intende al solito $\sum_{j=1}^{k} \int_{I(t,t_0) \cap I_j} |\gamma'(\tau)| d\tau$

ove $I(t, t_0)$ e $(t_0; t)$ o (t, t_0)

• λ è C^1 a tratti e $\frac{d\lambda}{dt}(t) = \frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)|$

•• Se γ è regolare (a tratti) si ha che λ è strettamente crescente, e λ^{-1} è C^1 a tratti, $t = \lambda^{-1}(s)$

$\alpha(s) =: \gamma(\lambda^{-1}(s))$ è equivalente a γ a tratti fissi

$$\alpha: \left(-\int_{\inf I}^{t_0} |\gamma'(\tau)| d\tau ; -\int_{\inf I}^{t_0} |\gamma'(\tau)| d\tau + \ell(\gamma)\right) \longrightarrow \mathbb{R}^N, \ |\alpha'| = 1$$

$\alpha(0) = \gamma(t_0)$

se $s > 0$ $\alpha(s)$ è il punto lungo $\mathrm{Im}\,\gamma$ che si trova a distanza s da $\gamma(t_0)$, nel senso di percorrenza di γ

se $s < 0$ $\alpha(s)$ è il punto lungo $\mathrm{Im}\,\gamma$ che si trova a distanza s da $\gamma(t_0)$, nel senso contrario a quello di percorrenza di γ

•• Una curva regolare γ è parametrizzata per lunghezza d'arco se e solo se $|\gamma'| = 1$, nel caso $s = t - t_0$, cioè $t = s + t_0$.

•• Sempre se γ è regolare, si ha $\frac{d\lambda^{-1}}{ds} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\gamma'|}$

Pertanto dato una f definita su $\operatorname{Im}\gamma$ posto
$\tilde{f}(t) = f(\gamma(t))$, $\tilde{\tilde{f}}(s) = f(\gamma(t(s)))$ si ha nel caso

$$\frac{d\tilde{\tilde{f}}}{ds} = \frac{d\tilde{f}}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\gamma'|}\,\frac{d\tilde{f}}{dt} \quad \text{in breve}$$

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{|\gamma'|}\,\frac{d}{dt} \qquad \text{ed iterando}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} = \frac{1}{|\gamma'|}\,\frac{d}{d}\left(\frac{1}{|\gamma'|}\,\frac{d}{dt}\right) =$$

$$= \frac{1}{|\gamma'|}\left(-\frac{\frac{\gamma'}{|\gamma'|}\cdot\gamma''}{|\gamma'|^2}\,\frac{d}{dt} + \frac{1}{|\gamma'|}\,\frac{d^2}{dt^2}\right) =$$

$$= -\frac{\gamma'\cdot\gamma''}{|\gamma'|^4}\,\frac{d}{dt} + \frac{1}{|\gamma'|^2}\,\frac{d^2}{dt^2}$$

•• Se $\alpha(s) = \gamma(\lambda^{-1}(s)) = \gamma(t(s))$, pensando alla classe di equivalenza di curve regolari, si scriverà $\frac{d\gamma}{ds}$ invece di $\frac{d\alpha}{ds}$, con l'accortezza di denotarla con $\dot{\gamma}$, riservando γ' a $\frac{d\gamma}{dt}$.
Con tale convenzione

$$\dot{\gamma}(s) = \frac{1}{|\gamma'(t(s))|}\cdot\gamma'(t(s))$$

$$\ddot{\gamma}(s) = \ldots$$