# Integrazione non orientata ed orientata su curve: prime nozioni

**Definizione**: dato $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ cammino si definisce, posto $-I = \{x : x = -y,\ y \in I\}$:

$$\gamma^- : -I \to \mathbb{R}^N \qquad \gamma^-(t) = \gamma(-t) \quad t \in -I$$

Se $I = \mathbb{R}$ o $I = [a;b]$ si definiscono rispettivamente

$$\ominus\gamma : I \to \mathbb{R}^N \qquad \ominus\gamma(t) = \gamma^-(t), \qquad \ominus\gamma(t) = \gamma(-t+b+a)$$

Nel secondo caso $\ominus\gamma$ è equivalente a $\gamma^-$, e sempre definito su $[a;b]$.

**Definizione** dati $\gamma : I = (a;b] \to \mathbb{R}^N$, $\tilde{\gamma} : J = [\alpha;\beta) \to \mathbb{R}^N$, cammini con $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(\alpha)$ posto $J + c = \{x : x = y + c,\ y \in J\}$, si definisce la "giustapposizione"

$$\gamma \oplus \tilde{\gamma} : I \cup (J + (b - \alpha)) \to \mathbb{R}^N \qquad \gamma \oplus \tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & t \le b \\ \tilde{\gamma}(t - b + \alpha) & t \ge b \end{cases}$$

**Definizione** (integrazione non orientata di funzioni su curve)

Dato $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ cammino $C^1$ a tratti, $f : \mathrm{Im}\,\gamma \to \mathbb{R}^k$ continua, si definisce

$$\left(\int_\gamma f_1\,ds, \dots, \int_\gamma f_k\,ds\right) = \int_\gamma f\,ds = \int_I f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt \in \mathbb{R}^k$$

- Se $\tilde{\gamma}$ è una riparametrizzazione monotona di $\gamma$ $C^1$ a tratti: $\int_{\tilde{\gamma}} f\,ds = \int_\gamma f\,ds$. In particolare $\int_{\gamma^-} f\,ds = \int_\gamma f\,ds$
- $\int_{\varphi \oplus \psi} f\,ds = \int_\varphi f\,ds + \int_\psi f\,ds$
- In sostanza $f$ rappresenta una densità per unità di lunghezza.

**Definizione** Se $\gamma$ è regolare a tratti e semplice si pone $\int_{\mathrm{Im}\,\gamma} f\,ds = \int_\gamma f\,ds$

Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è una 1-varietà e $\gamma$ la parametrizza in modo "fedele" si pone $\int_E f\,ds = \int_\gamma f\,ds$.

**Nota** Se $\gamma$ non è semplice ma $\{t \in I : \exists s \in I\ \gamma(t) = \gamma(s)\}$ è numerabile la definizione è ancora corretta. Osservazione analoga per la definizione di pagina 11 delle note del 5, 6 novembre.

**Definizione** (integrazione orientata di 1-forme, campi vettoriali, su cammini (orientati))

Dato $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ cammino $C^1$ a tratti, $v : \mathrm{Im}\,\gamma \to \mathbb{R}^N$ continuo, si definisce

$$\int_\gamma v = \int (v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t))\,dt = \int_I [v_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \dots + v_N(\gamma(t))\gamma_N'(t)]\,dt \in \mathbb{R}$$

- Se $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(h(s))$ $h : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ $\begin{cases} h(\alpha) = a \\ h(\beta) = b \end{cases}$, comunque sia $h$ continuo $\int_{\tilde{\gamma}} v = \int_\gamma v$; se $\begin{cases} h(\alpha) = b \\ h(\beta) = a \end{cases}$ $\int_{\tilde{\gamma}} v = -\int_\gamma v$
  in particolare $\boxed{\int_{\ominus\gamma} v = -\int_\gamma v}$. Inoltre $\boxed{\int_{\varphi \oplus \psi} v = \int_\varphi v + \int_\psi v}$
- In sostanza rappresenta il lavoro, fatto da $v$ lungo $\gamma$: se $\gamma$ è regolare, $\gamma^{-1}$ continua
  $\int_\gamma v = \int_\gamma v \cdot T\,ds \qquad T(P) = \dfrac{\gamma'(\gamma^{-1}(P))}{|\gamma'(\gamma^{-1}(P))|}$ è l'orientazione continua su $\mathrm{Im}\,\gamma$ indotta da $\gamma$.

(cfr. pagina 7bis note del 5, 6 novembre)