Analisi Matematica II, Anno Accademico 2015-2016.

Ingegneria Cvile Ambientale Edile

FOGLIO DI ESERCIZI 5, dal 4 Novembre al 11 Novembre 2015
primo semestre: cammini.

Altri esercizi ed esempi sull'argomento si trovano in diversi testi e in particolare nel sito del corso (http://elearn.ing.unipi.it/course/view.php?id=565):
nelle prove di esame svolte e nel volume di P.Acquistapace: Cap.4 pagg.303-5, 309-311, 315, 317-19, 343, 349-50 Es. 1, 3.

ESERCIZIO 1 Un cammino soddisfa le relazioni $y = x^2 - z,\ z = y^2 + x^3$, essendo la componente verticale della velocità z' costante eguale ad 1. Qual'è la sua velocità nel punto $(1, -1, 2)$?

ESERCIZIO 2 Si consideri il cammino $\gamma(t) = (t^2 + t, t^4 + t)$.
a- È regolare? È semplice?
b- Per quale dei seguenti intervalli il sostegno della sua restrizione è una 1-varietà:
$[0; 1]$, $(-1; 1)$, $(-\infty; 1)$, $(-\infty; 0]$, $(0; +\infty)$?
c- Per quali $a,\ b$ l' unione tra il sostegno della sua restrizione per $t \in]0; 1]$, e
$\{(x, y) : \sqrt{y-2} - a\sqrt{x-2} + b = 0\}$ è una 1-varietà sostegno di un'unica curva?

ESERCIZIO 3 Si consideri il sottoinsieme E di $\mathbf{R}^3$ definito da $yz + x = 1$ e $xz - x = 1$.
a) È limitato? È chiuso?
b) È una 1-varietà?
c) Si derminino le sue proiezioni sugli assi coordinati.
Si può trovare un cammino che abbia E come sostegno?

ESERCIZIO 4 a- Si scriva l'equazione del piano ortogonale nel punto $(0, 0, 1)$ al sostegno del cammino $(t^2, \sin t^2, \cos t^2)$.
b- Si calcolino le lunghezze del cammino e del suo sostegno per $t \in [-2; 1]$.

ESERCIZIO 5 Sia $M(t)$ il cammino a valori matrici avente per colonne M^1, M^2, M^3, le tre soluzioni con dati iniziali per $t = 0$ rispettivamente $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ dell'equazione differenziale lineare vettoriale:

$$\gamma'(t) =: \begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x - 2y + z \\ z' = ax + y + az \end{cases} =: A\gamma(t)$$

Per quali $a \in \mathbf{R}$ il volume del tetraedro di spigoli M^1, M^2, M^3 è infinitesimo per $t \to +\infty$?

ESERCIZIO 6 [Co-anomalia, cfr. A2 pag. 321] Dato un cammino piano $\gamma(t)$, $t \in [a; b)$ derivabile con continuità, e non nullo, si consideri il sistema di riferimento dipendente da $t \in [a; b)$: di origine $\gamma(t)$, ed assi il versore posizione $\nu(t)$ e il suo orogonale $\tau(t)$ in modo che $det(\tau, \nu) = -1$.

a- Si trovi, in termini delle funzioni ν e τ, una funzione $\Theta(t)$ per cui $\nu = (\cos\Theta, \sin\Theta)$. Che relazione essa ha con le coordinate polari?

b- Si trovino le coordinate di γ', e di γ'', nel caso esista, nel riferimento (ν, τ).

c- Se $|\gamma| =: \rho = f(\Theta)$, quando il cammino $\tilde{\gamma}(\vartheta) =: (f(\vartheta)\cos\vartheta, f(\vartheta)\sin\vartheta)$, $\vartheta \in Im\Theta$ è equivalente a γ?

d- Nel caso si esprima la lunghezza di γ come integrale in ϑ.

ESERCIZIO 7 a- Per $a \in \mathbf{R}$ sia dato un cammino $\gamma(\vartheta) = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$, in termini della seguente relazione tra raggio e co-anomalia $\vartheta^a\rho = 1$, $\vartheta > 0$. Si fissi $\theta_0 > 0$.

- Per quali $a \in R$ il cammino ha lunghezza finita per $\vartheta \leq \theta_0$?
- Per quali $a \in R$ il cammino interseca infinite volte il segmento $[0; 1]$ sull'asse delle ascisse?
- Per quali $a \in R$ il cammino ha lunghezza finita per $\vartheta \geq \theta_0$?

b- Si calcoli la lunghezza del cammino definito tramite la relazione $e^{\vartheta}\rho = 1 \;\; \vartheta \geq \frac{\pi}{4}$, tra raggio e co-anomalia.

ESERCIZIO 8 a- Calcolare la lunghezza dell'elica con parametrizzazione regolare semplice $(\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0; 2\pi]$.

b- Se la densità di massa lungo il sostegno è data da $f(x, y, z) = 4 - z - xy$ si calcoli la massa e il centro di massa.

ESERCIZIO 9 Si consideri l'intersezione dei sottoinsimei di $\mathbf{R}^3$ definite da $z = x^2 + y^2$, $x + y + z = 1$. Si mostri che è il sostegno di un cammino γ trovando una parametrizzazione regolare. Quindi si calcoli l'integrale $\int_\gamma |(2x+1)^2 - (2y+1)^2|\, ds$

ESERCIZIO 10 Si consideri in $\mathbf{R}^2$ il campo vettoriale $V = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$, ovvero considerando $\nu(x, y)$ il versore posizione, $\tau(x, y)$ quello ortogonale per cui $det(\nu, \tau) = 1$ e $\rho(x, y)$ la distanza dall'origine, $V = \dfrac{\tau}{\rho}$.

-Si calcoli $\int_{E,T} V$ nei seguenti casi: E la circonferenza di centro l'origine e raggio R orientata in senso antiorario da $T(x, y) = \dfrac{1}{R}(-y, x)$, E il quadrato $\max\{|x|, |y|\} = 1$ orientato "a tratti" in senso antiorario dai versori dei suoi lati.

- Si calcoli $\int_\gamma V$ per: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [12\pi; 38\pi]$.

ESERCIZIO 11 Calcolare il (bilancio di) lavoro del campo di forze

$$F = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}\right)$$

su una particella che si muova con legge oraria $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, 1 - e^{-t})$, $t \geq 0$.
