Sia G il grafico di $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ continua, $x^0 \in \Omega$, $P^0 = (x^0, f(x^0))$, $P = (x, f(x))$.

1) f è differenziabile in x^0 e T è l'N-piano affine tangente in P^0 a G cioè $T = \{(x,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M ; z = Df(x^0)(x-x^0) + f(x^0)\}$	$\Longleftrightarrow$	$P^0 \in T$, T è un grafico di una funzione affine nelle variabili x a valori in $\mathbb{R}^M$ A) $\lim\limits_{\substack{P \to P^0 \\ P \in G}} \frac{dist(P,T)}{dist(P,P^0)} = 0$

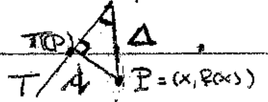
$\Longrightarrow$ $P \in G$, $P = (x, f(x))$, $T = \{(x, Df(x^0)(x-x^0) + f(x^0)\}$, $dist(P,P^0) = \sqrt{|x-x^0|^2 + |f(x)-f(x^0)|^2} \geq |x-x^0|$

$$\frac{dist(P,T)}{dist(P,P^0)} \leq \frac{dist(P,T)}{|x-x^0|} \leq \frac{dist((x,f(x)),(x, Df(x^0)(x-x^0)+f(x^0)))}{|x-x^0|} = \frac{|f(x)-f(x^0)-Df(x^0)(x-x^0)|}{|x-x^0|} \xrightarrow[x \to x^0]{} 0$$

$\Longleftarrow$ Si esamina per semplicità il caso $M=1$. Essendo per ipotesi T un grafico affine con $P^0 \in T$ è del tipo $\{(x, v \cdot (x-x^0) + f(x^0)\}$ per qualche $v \in \mathbb{R}^N$.

$dist(P,P^0)^2 = |P-P^0|^2 = |x-x^0|^2 + |f(x)-f(x^0)|^2$, $dist(P,T) = |P - \pi(P)|$ $\pi(P)$ proiezione di P su T. Posto:

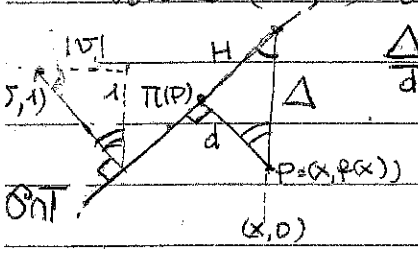
$d =: dist(P,T)$, $\Delta =: |f(x) - v\cdot(x-x^0) - f(x^0)|$, $H^2 =: \Delta^2 - d^2$



Si tratta di provare $\frac{d}{|P-P^0|} \xrightarrow[P \to P^0]{} 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{|x-x^0|} \xrightarrow[x \to x^0]{} 0$.

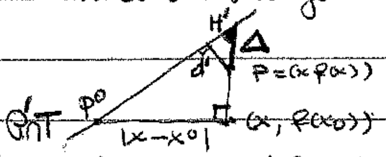
* Ci si restringe al piano bidimensionale per $\pi(P)$, $P = (x, f(x))$ e $(x,0)$: $\mathcal{P}$.

Poiché $(-v, 1)$ è ortogonale a T si ha $P - \pi(P) = \lambda(-v, 1)$;



$$\frac{\Delta}{d} = \frac{\sqrt{1+|v|^2}}{1}$$

* Ci si restringe al piano bidimensionale per P^0, $P = (x, f(x))$ e $(x, 0)$: $\mathcal{P}'$.



$$\frac{\Delta + |f(x)-f(x^0)|}{|x-x^0|} = \frac{H'}{d'} \leq \frac{H}{d} = \frac{|v|}{1}$$

(essendo $d' = dist(P, \mathcal{P}' \cap T) \geq dist(P,T) = dist(P, \mathcal{P} \cap T) = d$ e quindi $H \geq H'$)

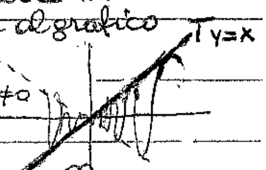
per cui si ha $|f(x) - f(x^0)| \leq |v|\,|x-x^0|$ e $d(P,P^0) \leq \sqrt{1+|v|^2}\,|x-x^0|$.

Concludendo $\frac{\Delta}{|x-x^0|} = \frac{\sqrt{1+|v|^2} \cdot d}{|x-x^0|} \leq (1+|v|^2) \frac{d}{d(P,P^0)} \longrightarrow 0$ ∎

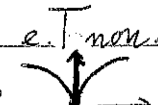
2) $P^0 \in T$ N-spazio affine (anche non grafico)

A) $\lim\limits_{\substack{P \to P^0 \\ P \in G}} \frac{dist(P,T)}{dist(P,P^0)} = 0$ B) $\lim\limits_{\substack{Q \to P^0 \\ Q \in T}} \frac{dist(Q,G)}{dist(Q,P^0)} = 0 \Rightarrow$ o T è verticale o f è differenziabile in x^0 con T tangente al grafico

<u>Nota</u>. B) e T grafico non bastano per avere la tesi: $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



- A) senza ipotesi T grafico non dà la differenziabilità, e T non sarebbe un vero e proprio tangente verticale : $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ $T: x = 0$



non vale B.