Alcune osservazioni:

i. Se f è differenziabile in x^0, v, w e $v+w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si ha $\frac{\partial f}{\partial(v+w)}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) + \frac{\partial f}{\partial w}(x^0)$
$\frac{\partial f}{\partial(v+w)}(x^0) = d_{x^0}f\,(v+w) = df\,v + df\,w$

ii. Se f è differenziabile in x^0 i vettori tangenti, non nulli, al grafico di f in $(x^0, f(x^0))$, cioè in $\mathrm{Graf}\,d_{x^0}f$, son tutti e soli quelli del tipo $(v, \frac{\partial f}{\partial v}(x^0))$; $v \neq 0$. In altri termini le velocità per $t=0$ dei cammini $\Gamma(t) = (\gamma(t), f(\gamma(t)))$, $\gamma(0) = x^0$ $\gamma'(0) \neq 0$, $\Gamma'(0) = (\gamma'(0), \frac{\partial f}{\partial \gamma'(0)}(x^0))$.

iii. Se E è una N-varietà C^1 in $\mathbb{R}^K$, $P^0 \in E$ il piano tangente, N-dimensionale, ad E in P^0 ha giacitura descritta da $\Gamma'(0)$: $\Gamma:]-1,1[\to E$, $\Gamma(0) = x^0$; infatti:
E è localmente il grafico di una funzione C^1 di N variabili a valori in un sottospazio di $\mathbb{R}^K$ di dimensione $K-N$: $\exists U$ intorno di P^0
$\exists V, W$ sottospazi di $\mathbb{R}^K$ $\dim V = N$, $\dim W = N-K$, $V \perp W$ $(\forall u \in \mathbb{R}^K \exists!\, v \in V, w \in W\ u = v + w)$,
$\exists \varphi : A \to W$ C^1 $\varphi(a^0) = P^0$ tali che $\mathrm{Graf}\,\varphi = E \cap U$.
Quindi un cammino in $E \cap U$ per P^0 sarà del tipo $\Gamma(t) = \gamma(t) + \varphi(\gamma(t)) \in \mathrm{Graf}\,\varphi$ (ovvero a meno di cambiamenti di sistemi di coordinate $(\gamma(t), \varphi(\gamma(t)))$)
con γ cammino a valori in A, $\gamma(0) = a^0$:
$\Gamma'(0) = \gamma'(0) + d_{a^0}\varphi\, \gamma'(0) \in \mathrm{Graf}(d_{a^0}\varphi) =:$ giacitura del tangente ad E in P^0.

Gradiente tangenziale

- $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $x^0 \in \Omega$, W sottospazio di $\mathbb{R}^N$: f si dice differenziabile in x^0 lungo W se $f|_{W+x^0}$ è differenziabile in x^0. Se f è differenziabile in x^0 si ha per definizione $d_{x^0}(f|_{W+x^0}) = (d_{x^0}f)|_W : W \to \mathbb{R}^M$. Volendo usare le coordinate di $\mathbb{R}^N$ conviene definire: il differenziale tangenziale e il gradiente tangenziale:
$d^W_{x^0} f =: d_{x^0} f \cdot \Pi^W_\perp$ $\quad$ $\Pi^W_\perp$ proiezione ortogonale su W, passando a trasposti.
$\nabla^W f(x^0) =: \Pi^W_\perp(\nabla f(x^0))$
- Sia E una N-varietà C^1 in $\mathbb{R}^K$, $P^0 \in E$, $T_{P^0}E + P^0$ il piano affine tangente ad E in P^0.
$f : E \to \mathbb{R}^M$ si dice differenziabile lungo E in P^0 se $\exists U$ aperto di $\mathbb{R}^K$ intorno di P^0 $\exists g : U \to \mathbb{R}^M$ $g|_E = f$, g differenziabile in P^0. Si definiscono $d^E_{P^0} f =: d^{T_{P^0}E}_{P^0} g = d_{P^0} g \cdot \Pi^{T_{P^0}E}_\perp$
$\nabla^E f(P^0) =: \nabla^{T_{P^0}E} g(P^0) = \Pi^{T_{P^0}E}_\perp(\nabla g(P^0))$. Non dipendono da g:
- se $g|_E = h|_E$, $\Gamma(t) \in E$ $\Gamma(0) = P^0$, $g(\Gamma(t)) = h(\Gamma(t))$: $\Gamma'(0) \cdot \nabla g(P^0) = \Gamma'(0) \cdot \nabla h(P^0)$, $\Gamma'(0)$ arbitrario in $T_{P^0}E$
Quindi $\nabla g(P^0)$ e $\nabla h(P^0)$ hanno le stesse proiezioni ortogonali su $T_{P^0}E$.

Esempio 1

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f = x \cdot y \cdot z$, W $x+y+z=0$, $x^0 (1,2,2)$: $W + x^0$ $x+y+z=5$

per calcolare la proiezione ortogonale su W, basta un versore normale a W.

$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ $\Pi_\perp^W(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(x+y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\nabla^W f(P^0) = \Pi_\perp^W(\nabla f(P^0)) = \nabla f(P^0) - (\nabla f(P_0) \cdot \vec{n})\vec{n} =$$

$$= \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}_{\substack{x=1 \\ y=2 \\ z=2}} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 12 & & 8 \\ 6 & - & 8 \\ 6 & & 8 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esempio 2

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f = x \cdot y \cdot z$, E $x^2+y^2+z^2 = 9$, $P^0(1,2,2)$

$$\nabla^E f(P^0) = \nabla^{T_{P^0}E} f(P^0) = \Pi_\perp^{T_{P^0}E}(\nabla f(P^0))$$

E è una sfera di raggio 3 e centro $(0,0,0)$, unione di quattro grafici C^1.
La giacitura del piano tangente in P^0 è individuata
dal versore normale, che nel caso è il versore posizione:

$\vec{n} = \frac{1}{3}(1,2,2)$; $T_{P^0}E$ $x+2y+2z=0$ $\Pi_\perp^{T_{P^0}E}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{9}(x+2y+2z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Essendo $\nabla f(P^0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\nabla^E f(P^0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\cancel{9}_{3}} \cancel{12}^{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 12 & & 4 \\ 6 & - & 8 \\ 6 & & 8 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esempio 3.

- Se $\dim W = 1$ W tw, $t \in \mathbb{R}$, $|w| = 1$; $u \in W \Leftrightarrow u = tw$; $\Pi_\perp^W(u) = (v \cdot w)w$

$d_{x^0}(f|_{x^0+W})\, u \overset{u \in W}{=} d_{x^0} f(tw) = t \frac{\partial f}{\partial w}(x^0)$; nella base $\{w\}$ $d_{x^0}f|_W \sim \frac{\partial f}{\partial w}(x^0)$

$d^W_{x^0} f\, v = d_{x^0}f \cdot \Pi_\perp^W v = d_{x^0}f\, (v \cdot w)w = (v \cdot w)\frac{\partial f}{\partial w}(x^0)$ cioè $\nabla^W f(P^0) = \frac{\partial f}{\partial w}(x^0) \cdot w$ in $\mathbb{R}^N$

- Se $\dim W = 2$, $N = 3$, $n \perp W$ $|n| = 1$ $\Pi_\perp^W(v) = v - (v \cdot n)n$

$$\nabla^W f(P^0) = \nabla f(P^0) - (n \cdot \nabla f(P^0))n = \nabla f(P^0) - \frac{\partial f}{\partial n}(P^0)\, n$$

Data una base di W w^1, w^2 : $n = \frac{w^1 \times w^2}{|w^1 \times w^2|}$. In tale base $d_{x^0}f|_W \sim \left(\frac{\partial f}{\partial w^1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial w^2}(x^0)\right)$

Regola della catena

$x^0 \in \Omega$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^N$, $y^0 \in A$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^K$

$$\Omega_x \xrightarrow{f} A_y \xrightarrow{g} \mathbb{R}^M_z \qquad y = f(x),\ z = g(y),\ y^0 = f(x^0)$$

se f è differenziabile in x^0, g è differenziabile in $f(x^0)$ allora $g \circ f$ è differenziabile in x^0. Inoltre si ha

$d_{x^0} f \circ g = d_{f(x^0)} g \cdot d_{x^0} f$ (composizione di operatori lineari)

passando alle matrici Jacobiane $(J^u F)^j_i = \frac{\partial F_i}{\partial u^j}$

$$\underset{M\times N}{J^x g\circ f(x^0)} = \underset{M\times K}{J^y g(f(x^0))} \cdot \underset{K\times N}{J^x f(x^0)} \quad \text{(prodotto righe per colonne)}$$

passando alle trasposte $\nabla^u F = {}^t J^u F$

$$\underset{N\times M}{\nabla^x g\circ f(x^0)} = \nabla^x f(x^0) \cdot \nabla^y g(f(x^0)) \quad \text{(prodotto righe per colonne)}$$

$$J = \underset{M\times N}{\left[\frac{\partial g\circ f}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial g\circ f}{\partial x^N} \right]}(x^0) = \underset{M\times K}{\left[\frac{\partial g}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial g}{\partial y^K} \right]}(f(x^0)) \underset{K\times N}{\left[\frac{\partial f}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x^N} \right]}(x^0) \quad \text{esplicitando}$$

$$\frac{\partial g_i(f(x^0))}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial g_i}{\partial y^k}(f(x^0)) \frac{\partial f_k}{\partial x^j}(x^0) \quad \text{genericamente}$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial g_i}{\partial y^k} \frac{\partial f_k}{\partial x^j} \quad \text{con notazione implicita}$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial z_i}{\partial y^k} \frac{\partial y_k}{\partial x^j} \qquad d_x z = {}_y\ d_x y$$

Ed anche

$$\frac{\partial \vec{g}\circ f}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot \nabla \right) \vec{g} \;{}'\!= \frac{\partial \vec{g}}{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)} \quad \text{ovvero}$$

$$\frac{\partial \vec{g}\circ f}{\partial v} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)} = (\overline{v \cdot \nabla f}) \cdot \nabla g$$

DIM Già considerata per $N=1$ $\frac{d}{dt}(g(f(t)))' = f'(t) \cdot \nabla g(f(t))$ $\left(\|A\| = \sup \frac{|Av|}{|v|} \right)$

$g(f(x)) - g(f(x^0)) = d_{f(x^0)} g \cdot [f(x) - f(x^0)] + o(|f(x) - f(x^0)|)$ $\quad f(x) - f(x^0) = d_{x^0} f \cdot [x - x^0] + o(|x - x^0|)$

$|f(x) - f(x^0)| \le \|d_{x^0} f\| |x - x^0| + o(|x - x^0|)$

$= d_{f(x^0)} g \cdot d_{x^0} f [x - x^0] + d_{f(x^0)} g \cdot [o(|x - x^0|)] + o(|x - x^0|) =$

$= d_{f(x^0)} g \cdot d_{x^0} f [x - x^0] + o(|x - x^0|)$. Cioè $\exists\, d_{x^0} g\circ f = d_{f(x^0)} g \cdot d_{x^0} f$

Corollario 1 : $f: \Omega_x \to \Omega'_y$ bigettiva Ω, Ω' aperti di $\mathbb{R}^N$,
Se $d_x f$ è di rango massimo in x
cioè è invertibile, cioè $\det d_x f \neq 0$, allora
$\exists\ d_{f(x)}(f^{-1}) = (d_x f)^{-1}$

Corollario 2: Con le precedenti notazioni e ipotesi, se $F: \Omega' \to \mathbb{R}$
$F = F(y)$, posto per uno generico $G = G(y)$: $\tilde{G}(x) = G(f(x))$, si ha
$d_x \tilde{F} = dF \cdot d_x f$ passando alle matrici e trasponendo

$$\nabla^x \tilde{F}(x) = \nabla^x f(x) \cdot \nabla^y F(f(x)) \quad \text{cioè} \quad \nabla^x \tilde{F} = \nabla^x f\ \widetilde{\nabla^y F}$$

Corollario 3 Con le precedenti notazioni e ipotesi

$$\frac{\partial}{\partial y^k} = \sum_{j=1}^{N} \left((\nabla f)^{-1} \right)^j_k \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Si consideri la stretta analogia per quanto riguarda la derivazione in lunghezza d'arco s, rispetto a quella generica

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{|\gamma'(t)|} \frac{d}{dt}$$