Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale
Prova scritta del 16 novembre 2015 per studenti fuori corso

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{(x-y)^2}{2} - \frac{(x+y)^3}{3}, \qquad (x,y) \in D,$$

ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 1\}$.

(i) Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 2, f(1,2))$.

(ii) Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva $L = \{(x,y) \in D : f(x,y) = 1/2\}$ nel punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(iii) Si trovino il massimo ed il minimo di f su D.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int_E |xy| z^2 \, dxdydz,$$

ove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$.

Esercizio 3a Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\, e^{y - 2x^2}, \\ y(0) = -\ln 2. \end{cases}$$

Si determini esplicitamente la soluzione, si verifichi che essa è una funzione pari definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, e se ne calcoli il limite per $x \to +\infty$.

Esercizio 3b Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (x^3 + y^4, x^4 + y^3)$ lungo la curva Γ descritta dall'equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e percorsa in verso antiorario.

Esercizio 3c Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{G}(x,y,z) = (x^2, y^2, 1-z)$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ 0 \leq z \leq 1\}$, orientata dalla normale diretta verso l'esterno.

Esercizio 3d Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$, ove

$$f_n(x) = \frac{(\sin x)^n}{2 + (\sin x)^n}, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

(i) Si calcoli, se esiste, il limite puntuale della successione $\{f_n\}$.

[**(ii)** Si trovino gli eventuali sottointervalli di $[0, 2\pi]$ in cui si ha convergenza uniforme.

(iii) [**solo per studenti del 2015-16**] Si determini, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{(\sin x)^n}{2 + (\sin x)^n} \, dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione f è di classe C^∞, e $f(1,2) = -\frac{17}{2}$. Poiché

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x - y - (x+y)^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y - x - (x+y)^2,$$

l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $\left(1, 2, -\frac{17}{2}\right)$ è

$$z = -\frac{17}{2} - 10(x-1) - 8(y-2),$$

ossia

$$z + 10x + 8y = \frac{35}{2}\,.$$

(ii) Poiché il gradiente di f è ortogonale a qualunque curva di livello di f in ogni suo punto, l'equazione della retta tangente alla curva L è

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

ossia

$$y = x - 1.$$

(iii) Gli eventuali punti stazionari interni sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - y - (x+y)^2 = 0 \\ y - x - (x+y)^2 = 0. \end{cases}$$

Confrontando le due equazioni si deduce $x - y = 0$, ossia $x = y$, e da una qualunque delle due segue di conseguenza $x + y = 0$; pertanto l'unica soluzione del sistema è $(x,y) = (0,0)$. In questo punto la f si annulla, ed è immediato vedere che $(0,0)$ non è né punto di massimo locale, né punto di minimo locale, dato che $f(a,-a) > 0$ e $f(a,a) < 0$ per ogni $a > 0$.

Il massimo ed il minimo di f in D, che esistono per il teorema di Weierstrass, sono quindi raggiunti in punti della frontiera. Il bordo di Q si compone di quattro vertici e di quattro segmenti. Nei vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ si ha

$$f(1,0) = \frac{1}{6}\,, \qquad f(0,1) = \frac{1}{6}\,, \qquad f(-1,0) = \frac{5}{6}\,, \qquad f(0,-1) = \frac{5}{6}\,.$$

Nei quattro segmenti,

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = x \\ y = 1 - x, \end{cases} \quad x \in \,]0,1[\,, \qquad \Gamma_2 : \begin{cases} x = x \\ y = x + 1, \end{cases} \quad x \in \,]-1,0[\,,$$

$$\Gamma_3 : \begin{cases} x = x \\ y = -x - 1, \end{cases} \quad x \in \,]-1,0[\,, \qquad \Gamma_4 : \begin{cases} x = x \\ y = x - 1, \end{cases} \quad x \in \,]0,1[\,,$$

si ha:

$$
\begin{aligned}
&g_1(x) := f|_{\Gamma_1}(x, 1-x) = \tfrac{(2x-1)^2}{2} - \tfrac{1}{3}, \quad g_1'(x) = 2(2x-1) \geq 0 \iff \tfrac{1}{2} \leq x < 1;\\
&g_2(x) := f|_{\Gamma_2}(x, x+1) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{(2x+1)^3}{3}, \quad g_2'(x) = -2(2x+1)^2 \leq 0 \ \ \forall x \in]-1, 0[\,;\\
&g_3(x) := f|_{\Gamma_3}(x, -x-1) = \tfrac{(2x+1)^2}{2} + \tfrac{1}{3}, \quad g_3'(x) = 2(2x+1) \geq 0 \iff -\tfrac{1}{2} \leq x < 0;\\
&g_4(x) := f|_{\Gamma_4}(x, x-1) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{(2x-1)^3}{3}, \quad g_1'(x) = -2(2x-1)^2 \leq 0 \ \ \forall x \in]0, 1[\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto vi è un punto di minimo vincolato per g_1 in $x = \frac{1}{2}$, in cui $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$, ed un punto di minimo vincolato per g_3 in $x = -\frac{1}{2}$, in cui $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$.
Si conclude allora, confrontando i valori di f nei punti trovati, che

$$\max_D f = f(0,-1) = f(-1,0) = \frac{5}{6}\,, \qquad \min_D f = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}\,.$$

Esercizio 2 L'insieme E è chiuso e limitato. Utilizzando le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = r \sin\vartheta \sin\varphi \qquad\qquad r \geq 0, \quad \vartheta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \\ z = r\cos\vartheta, \end{cases}$$

l'insieme E si rappresenta come

$$E' = \{(r, \vartheta, \varphi) : \ r^2 \leq 1, \ 0 \leq r\cos\vartheta \leq r\sin\vartheta\},$$

ossia mediante le limitazioni

$$0 \leq r \leq 1, \quad \frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\,, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Si ha dunque, tenuto conto del determinante $r^2 \sin\vartheta$ dello Jacobiano,

$$
\begin{aligned}
\int_E |xy| z^2 \, dxdydz &= \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^6 \sin^3\vartheta \cos^2\vartheta |\cos\varphi \sin\varphi| \, d\varphi d\vartheta dr.\\
&= \frac{1}{14} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos^2\vartheta (1 - \cos^2\vartheta) \, d\vartheta \int_0^{2\pi} |\sin 2\varphi| \, d\varphi.
\end{aligned}
$$

Poiché

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos^2\vartheta (1-\cos^2\vartheta)\, d\vartheta = \left[-\frac{1}{3}\cos^3\vartheta + \frac{1}{5}\cos^5\vartheta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{20\sqrt{2}} = \frac{7}{60\sqrt{2}}\,,$$

mentre

$$\int_0^{2\pi} |\sin 2\varphi| \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} |\sin t| \, dt = 2 \int_0^{\pi} \sin t \, dt = 2\,[-\cos t]_0^{\pi} = 4,$$

si conclude che

$$\int_E |xy|z^2\,dxdydz = \frac{2}{7}\left[\frac{7}{60\sqrt{2}}\right] = \frac{\sqrt{2}}{60}\,.$$

Esercizio 3a L'equazione differenziale è a variabili separabili. Si ha successivamente

$$\begin{aligned} e^{-y}dy &= x\,e^{-2x^2}\,dx,\\ e^{-y} &= \tfrac{1}{4}e^{-2x^2} + c,\\ y &= -\ln\left(\tfrac{1}{4}e^{-2x^2} + c\right). \end{aligned}$$

La condizione iniziale implica

$$-\ln 2 = y(0) = -\ln\left(\frac{1}{4} + c\right),$$

da cui $\frac{1}{4} + c = 2$ ed infine $c = \frac{7}{4}$. Pertanto

$$y(x) = -\ln\left(\frac{1}{4}e^{-2x^2} + \frac{7}{4}\right) = -\ln\frac{7 + e^{-2x^2}}{4}\,.$$

Questa funzione è ovviamente pari e definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = -\ln\frac{7}{4}\,.$$

Esercizio 3b Possiamo descrivere la curva Γ con la parametrizzazione

$$x(\vartheta) = 2\cos\vartheta, \quad y(\vartheta) = \sin\vartheta, \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi,$$

la quale ha verso antiorario. Il vettore tangente è allora

$$\boldsymbol{\tau} = (x'(\vartheta), y'(\vartheta)) = (-2\sin\vartheta, \cos\vartheta)$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\,ds &= \int_0^{2\pi} [(x(\vartheta)^3 + y(\vartheta)^4)x'(\vartheta) + (y(\vartheta)^3 + x(\vartheta)^4)y'(\vartheta)]\,d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} [-2(8\cos^3\vartheta + \sin^4\vartheta)\sin\vartheta + (\sin^3\vartheta + 16\cos^4\vartheta)\cos\vartheta]\,d\vartheta. \end{aligned}$$

Dato che l'integrando è 2π-periodico, possiamo integrare fra $-\pi$ e π, anziché fra 0 e 2π; in questo modo, sfruttando la disparità di tre dei quattro addendi, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\,ds = 16\int_{-\pi}^{\pi}\cos^5\vartheta\,d\vartheta &= 16\int_{-\pi}^{\pi}\cos\vartheta(1-\sin^2\vartheta)^2\,d\vartheta = \\ &= 16\left[\sin\vartheta - \frac{2}{3}\sin^3\vartheta + \frac{1}{5}\sin^5\vartheta\,\right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Quindi il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ è nullo.
Osservazione Avremmo anche potuto utilizzare il teorema della divergenza. Infatti, posto

$$\mathbf{G}(x,y) = (F_2(x,y), -F_1(x,y)) = (x^4 + y^3, -x^3 - y^4),$$

ed osservato che il versore normale esterno al dominio E delimitato dalla curva chiusa Γ è

$$\boldsymbol{\nu} = (\tau_2, -\tau_1),$$

si ha

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle = F_1\tau_1 + F_2\tau_2 = (-G_2)(-\nu_2) + G_1\nu_1 = \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\nu} \rangle,$$

e dunque, per il teorema della divergenza,

$$\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds = \int_\Gamma \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, ds = \int_E \operatorname{div} \mathbf{G}(x,y) \, dxdy.$$

Essendo

$$\operatorname{div} \mathbf{G}(x,y) = 4x^3 - 4y^3,$$

troviamo infine, per la simmetria del dominio E rispetto all'origine e per la disparità della funzione integranda,

$$\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds = \int_E \operatorname{div} \mathbf{G}(x,y) \, dxdy = 0.$$

Esercizio 3c Possiamo parametrizzare la superficie Σ nel modo seguente:

$$x(r,\vartheta) = r\cos\vartheta, \quad y(r,\vartheta) = r\sin\vartheta, \quad z(r,\vartheta) = r^2, \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi.$$

La matrice Jacobiana è

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \\ 2r & 0 \end{pmatrix},$$

quindi il vettore normale indotto è

$$\boldsymbol{\nu} = \left(-2r^2\cos\vartheta, -2r^2\sin\vartheta, r\right)$$

ed è diretto verso l'interno, essendo le sue prime due componenti negative nel primo quadrante. Quindi tale vettore va cambiato di segno. Si ha pertanto

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[x(r,\vartheta)^2(2r^2\cos\vartheta) + y(r,\vartheta)^2(2r^2\sin\vartheta) - (1 - z(r,\vartheta))r\right] \, d\vartheta dr = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[2r^4(\cos^3\vartheta + \sin^3\vartheta) - r(1-r^2)\right] \, d\vartheta dr. \end{aligned}$$

Poiché gli integrali

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\vartheta \, d\vartheta, \qquad \int_0^{2\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta$$

sono nulli, si ottiene

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma = -2\pi \int_0^1 r(1-r^2)\, dr = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Osservazione Avremmo anche potuto utilizzare il teorema della divergenza, osservando che il campo $\mathbf{G}$ è nullo sul "tappo" della superficie Σ, cioè sul disco

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \le 1, \; z=1\}.$$

La superficie $\Sigma \cup D$ è chiusa e quindi, detta E la regione contenuta in $\Sigma \cup D$, si ha

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma = \int_{\Sigma \cup D} \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma = \int_E \operatorname{div} \mathbf{G}(x,y,z)\, dxdydz.$$

Essendo

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \le z \le 1\},$$

ed osservato che

$$\operatorname{div} \mathbf{G}(x,y,z) = 2x + 2y - 1,$$

si trova, passando in coordinate cilindriche,

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} \langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma &= \int_E (2x+2y-1)\, dxdydz = \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^1 (2r\cos\vartheta + 2r\sin\vartheta - 1) r \, drd\vartheta dz = \\
&= 0 + 0 - 2\pi \int_0^1 r(1-r^2)\, dr = -\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 3d (i) Per ogni $x \in [0, 2\pi]$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} (\sin x)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \frac{\pi}{2}\,, \\ \nexists & \text{se } x = \frac{3\pi}{2}\,, \\ 0 & \text{se } x \in [0,2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}. \end{cases}$$

Quindi la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente in $[0,2\pi] \setminus \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \frac{\pi}{2}\,, \\ 0 & \text{se } x \in [0,2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}. \end{cases}$$

ed in particolare

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{(\sin x)^n}{2 + (\sin x)^n} = 0 \quad \text{q.o. in } [0,2\pi].$$

(ii) Essendo la funzione limite non continua in $x = \frac{\pi}{2}$ e addirittura non definita in $x = \frac{3\pi}{2}$, la convergenza non può essere uniforme in alcun sottointervallo contenente uno di questi due punti. Invece in ogni intervallo della forma $[a,b]$ contenuto in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\, \cup$

$\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ vi è convergenza uniforme, in quanto esiste $\delta > 0$ tale che sia $|\sin x| \leq 1 - \delta$ per ogni $x \in [a, b]$, e di conseguenza risulta

$$\left|\frac{(\sin x)^n}{2 + (\sin x)^n}\right| \leq \frac{|\sin x|^n}{2 - 1} = |\sin x|^n \leq (1 - \delta)^n \quad \forall x \in [a, b],$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{(\sin x)^n}{2 + (\sin x)^n}\right| = 0.$$

(iii) Come sappiamo, si ha $f_n(x) \to 0$ q.o. in $[a, b]$. Inoltre la convergenza è dominata dalla funzione costante 1:

$$\left|\frac{(\sin x)^n}{2 + (\sin x)^n}\right| \leq 1 \qquad \forall x \in [0, 2\pi].$$

Ne segue, per il teorema di Lebesgue,

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{(\sin x)^n}{2 + (\sin x)^n}\, dx = \int_0^{2\pi} 0\, dx = 0.$$

Osservazione Si può dimostrare il punto (iii) anche senza ricorrere al teorema di Lebesgue: basta osservare che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta \in]0, \varepsilon]$ tale che

$$|\sin x| \leq 1 - \varepsilon \qquad \forall x \in [0, 2\pi] \setminus \left(\left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2} - \delta, \frac{3\pi}{2} + \delta\right]\right);$$

quindi, decomponendo l'integrale $\int_0^{2\pi}$ come $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} + \int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{3\pi}{2}-\delta} + \int_{\frac{3\pi}{2}-\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta} + \int_{\frac{3\pi}{2}+\delta}^{2\pi}$, si ha

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{2\pi} \frac{(\sin x)^n}{2 + (\sin x)^n}\, dx\right| &\leq \int_0^{2\pi} \frac{|\sin x|^n}{|2 + (\sin x)^n|}\, dx \leq \int_0^{2\pi} |\sin x|^n\, dx \leq \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} (1 - \varepsilon)^n\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} 1\, dx + \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{3\pi}{2}-\delta} (1 - \varepsilon)^n\, dx + \int_{\frac{3\pi}{2}-\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta} 1\, dx + \int_{\frac{3\pi}{2}+\delta}^{2\pi} (1 - \varepsilon)^n\, dx \leq \\
&\leq 2\pi(1 - \varepsilon)^n + 4\delta
\end{aligned}$$

Dunque, se n è sufficientemente grande,

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{(\sin x)^n}{2 + (\sin x)^n}\, dx\right| \leq (2\pi + 4)\delta \leq (2\pi + 4)\varepsilon,$$

e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{(\sin x)^n}{2 + (\sin x)^n}\right| = 0.$$