Scambio dell'ordine di derivazione

Esempio $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ $\qquad f(x,y) = -f(y,x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 & \text{se } y=0 \\ \lim\limits_{x\to 0} y\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -y & \text{se } y \neq 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)$$

Teorema 1

Se in un intorno V di P, f è differenziabile e tutte le derivate parziali prime sono differenziabili in P allora
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(P)$$

DIM Scelte due variabili x_i, x_j $i \neq j$ ci si riduce alle funzione $g(x_i,x_j) = f(P_1,\dots,P_{i-1},x_i,P_{i+1},\dots,x_j,P_{j+1}\dots)$ per comodità di lettura le si ribattezzino x e y: $g(x,y) = f(P_1\dots P_{i-1},x,P_{i+1},\dots,y,P_{j+1},\dots)$ così come $P_i = p$ e $P_j = q$.

$$A = g(p+h,q+h) - g(p+h,q) - g(p,q+h) + g(p,q) = \begin{cases} g(p+h,q+h) - g(p,q+h) - [g(p+h,q) - g(p,q)] = \psi(q+h) - \psi(q) \\ g(p+h,q+h) - g(p+h,q) - [g(p,q+h) - g(p,q)] = \varphi(p+h) - \varphi(p) \end{cases}$$

LAGRANGE
$$= \begin{cases} h\dfrac{\partial g}{\partial y}(p+h,q+\tilde h) - h\dfrac{\partial g}{\partial y}(p,q+\tilde h) & |\tilde h| \le |h| \\ h\dfrac{\partial g}{\partial x}(p+\tilde{\tilde h},q+h) - h\dfrac{\partial g}{\partial x}(p+\tilde{\tilde h},q) & |\tilde{\tilde h}| \le |h| \end{cases} \pm \begin{cases} h\dfrac{\partial g}{\partial y}(p+h,q+\tilde h) - h\dfrac{\partial g}{\partial y}(p,q) - h\dfrac{\partial g}{\partial y}(p,q+\tilde h) + h\dfrac{\partial g}{\partial y}(p,q) \\ h\dfrac{\partial g}{\partial x}(p+\tilde{\tilde h},q+h) - h\dfrac{\partial g}{\partial x}(p,q) - h\dfrac{\partial g}{\partial x}(p+\tilde{\tilde h},q) + h\dfrac{\partial g}{\partial x}(p,q) \end{cases}$$

DIFFERENZIABILITÀ
$$= \begin{cases} h^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(p,q) + \cancel{h\tilde h\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(p,q)} + h\,o(|h|+|\tilde h|) - \cancel{0\cdot h\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(p,q)} - \cancel{h\tilde h\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(p,q)} + h\,o(|\tilde h|) \\ h^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x}(p,q) + \cancel{h\tilde{\tilde h}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(p,q)} + h\,o(|h|+|\tilde{\tilde h}|) - \cancel{h\tilde{\tilde h}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(p,q)} - \cancel{0\cdot h\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x}(p,q)} + h\,o(|\tilde{\tilde h}|) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} h^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(p,q) + h\,o(|h|) \\ h^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x}(p,q) + h\,o(|h|) \end{cases} \qquad \frac{A}{h^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(p,q) + o(1)_{h\to 0} = \frac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x}(p,q) + o(1)_{h\to 0} \quad \blacksquare$$

Il seguente criterio non è confrontabile con il precedente, nel senso che le ipotesi dell'uno possono essere verificate mentre quelle dell'altro no. Questo secondo criterio è quello che permette di passare da $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ a $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

Teorema 2 Sia f definita in un intorno U di $\underline{p}$ in $\mathbb{R}^N$, posto per $i \lessgtr j$

$$g(x_i, x_j) = f(p_1 \cdots p_{i-1}, x_i, p_{i+1} \cdots p_{j-1}, x_j, p_{j+1} \cdots), \quad x_i = x, \ x_j = y, \ p_i = p, \ p_j = q$$

1) $\exists \frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ in un intorno di (p,q) $\left(\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ in } (p_1 \cdots x_i \cdots x_j \cdots p_N) \right)$

2) $\exists \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y)$ in un intorno di (p,q) $\left(\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p_1 \cdots x_i \cdots x_j \cdots p_N) \right)$

3) $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y)$ è continua in (p,q)

allora

$$\exists \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(p,q) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(p,q) \quad \text{i.e.} \quad \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{p})$$

DIM Più elaborata della precedente se pur sullo stesso falsariga.

$$A = g(p+h, q+k) - g(p+h, q) - g(p, q+k) + g(p,q) = \begin{cases} g(p+h, q+k) - g(p, q+k) - [g(p+h, q) - g(p,q)] = \psi(q+k) - \psi(q) \\ g(p+h, q+k) - g(p+h, q) - [g(p, q+k) - g(p,q)] = \varphi(p+h) - \varphi(p) \end{cases}$$

$$\underset{\text{LAGRANGE}}{\overset{1)}{=}} \begin{cases} k \frac{\partial g}{\partial y}(p+h, q+\tilde{k}) - k \frac{\partial g}{\partial y}(p, q+\tilde{k}) & |\tilde{k}| \le |k| \\ h \frac{\partial g}{\partial x}(p+\tilde{h}, q+k) - h \frac{\partial g}{\partial x}(p+\tilde{h}, q) & |\tilde{h}| \le |h| \end{cases} \underset{\text{LAGRANGE}}{\overset{2) \exists \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}}{=}} \begin{cases} hk \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(p+\tilde{\tilde{h}}, q+\tilde{k}) & |\tilde{\tilde{h}}| \le |h| \\ h\left[\frac{\partial g}{\partial x}(p+\tilde{h}, q+k) - \frac{\partial g}{\partial x}(p+\tilde{h}, q)\right] \end{cases}$$

$$R_k = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(p, q+k) - \frac{\partial g}{\partial x}(p,q)}{k} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(p, q+k) - \frac{\partial g}{\partial x}(p+\tilde{h}, q+k)}{k} + \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(p+\tilde{h}, q) - \frac{\partial g}{\partial x}(p,q)}{k} + \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(p+\tilde{h}, q+k) - \frac{\partial g}{\partial x}(p+\tilde{h}, q)}{k} =$$

$$= \quad \text{"} \quad \text{"} \quad + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(p+\tilde{\tilde{h}}, q+\tilde{k})$$

Nota $\exists \lim_{h \to 0} R_k = R_k$ (R_k non dipende da h) ed è uniforme in k. Per 3) dato $\varepsilon > 0$ vi è $\rho > 0$: se $|h| + |k| \le \rho$ allora $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(p+\tilde{\tilde{h}}, q+\tilde{k}) - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(p,q) \right| \le \varepsilon$

$$\left| R_k - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(p,q) \right| \le \left| R_k - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(p+\tilde{\tilde{h}}, q+\tilde{k}) \right| + \varepsilon \quad \text{ma} \quad \lim_{h \to 0} \left| R_k - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(p+\tilde{\tilde{h}}, q+\tilde{k}) \right| = 0$$

per cui per $|k| \le \rho$ $\left| R_k - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(p,q) \right| \le \varepsilon$ cioè $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p,q) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p,q)$ ∎

Corollario Se f ha derivate parziali di ordine minore o eguale a m continue in $\Omega = \mathring{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N$ allora l'ordine di derivazione è irrilevante.

Condizioni sufficienti per la differenziabilità

Teorema 1 (di massima pendenza)

Sia f lipschitziana $\displaystyle L := \sup_{x \neq x'} \frac{|f(x) - f(x')|}{|x - x'|_{\mathbb{R}^N}} < +\infty$

Se vi è $v \in \mathbb{R}^N$ $|v| = 1$ $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = L$ allora

f è differenziabile in x^0 e $\nabla f(x^0) = L v$.

~~DIM~~ cfr. G. Di Matteo tesi di laurea triennale, Pisa 2013-2014; Prop. 1.3.4 pag. 9.
Non ho trovato riferimenti su libri di testo in italiano, per ora.

Teorema 2 (del differenziale totale)

Se f ha derivate parziali in un intorno di $\underline{x}^0$, che sono continue in $\underline{x}^0$
allora f è differenziabile in x^0.

DIM Per induzione sulla dimensione del dominio $N \geq 2$.

- $$f(x,y) - f(x^0,y^0) = f(x,y) - f(x,y^0) + f(x,y^0) - f(x^0,y^0) \overset{\text{LAGRANGE}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)(y-y^0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y^0)(x-x^0)$$

$|\eta - y^0| \leq |y-y^0|$, $|\xi - x^0| \leq |x - x^0|$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)(x-x^0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)(y-y^0) + \underbrace{(y-y^0)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\right] + (x-x^0)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y^0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)\right]}_{R}$$

$$\frac{|R|}{\sqrt{(x-x^0)^2 + (y-y^0)^2}} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y^0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)\right| \xrightarrow[(x,y)\to(x^0,y^0)]{} 0$$

- $$f(x_1,\dots,x_N) - f(x_1^0,\dots,x_N^0) = f(x_1 \dots x_N) - f(x_1,\dots,x_{N-1},x_N^0) + f(x_1 \dots x_{N-1},x_N^0) - f(x_1^0,\dots,x_N^0)$$

$$|\xi - x_N^0| \leq |x_N - x_N^0| \overset{\text{LAGRANGE}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1,\dots,x_{N-1},\xi)(x_N - x_N^0) + \text{''}$$

$$\overset{\text{IPOTESI INDOTTIVA}}{=} \text{''} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^0)(x_i - x_i^0) + o\left(\sum_{i=1}^{N-1}|x_i - x_i^0|\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)(x_i - x_i^0) + \underbrace{\boxed{(x_N - x_N^0)\left[\frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1,\dots,\xi) - \frac{\partial f}{\partial x_N}(\underline{x}^0)\right]}}_{R'} + o(|x - x^0|)$$

$$\frac{|R'|}{|x - x^0|} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1 \dots \xi) - \frac{\partial f}{\partial x_N}(x^0)\right| \xrightarrow[\underline{x}\to\underline{x}^0]{} 0$$

∎