Analisi Matematica II, Anno Accademico 2015-2016.

Ingegneria Cvile Ambientale Edile

FOGLIO DI ESERCIZI 7, dall' 25 Novembre al 27 Novembre 2015
Calcolo Differenziale 2: presentazione di varietà, teoremi del Dini, del rango e di invertibilità locale.

Altri esercizi ed esempi sull'argomento si trovano in diversi testi e in particolare nel sito del corso (http://elearn.ing.unipi.it/course/view.php?id=565):
nelle prove di esame svolte e nel volume di P.Acquistapace: Analisi 2 Cap 1.9, pagg. 79-81, Cap. 4.9 pagg.389-390 Es. 1-7 Cap. 4.11, pag.415

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.

ESERCIZIO n. 1 a-(Test di ingresso, seconda parte Settembre-Ottobre 2014, Esercizio 12)

Si calcoli la dimensione del nucleo dell'applicazione lineare che, relativamente alle basi canoniche di $\mathbf{R}^5$ ed $\mathbf{R}^3$, è associata alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b-(Test di ingresso, seconda parte Settembre-Ottobre 2014, Esercizio 14)

a) Disegnare nel piano cartesiano il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ dato da

$$(1+s+t, 1+s)\ , \qquad (s,\ t)\ \in\ [0;1]\times[0;1]\ \ .$$

b) Che tipo di figura geometrica rappresenta il sottoinsieme di $\mathbf{R}^4$ dato da

$$(1+r+s+t, 1+r, 1+s, 1+t)\ , \qquad (r,s,t)\ \in\ [0;1]\times[0;1]\times[0;1]\ \ ?$$

ESERCIZIO n.2 Rispondere usando la nuova teoria (cfr. Esercizio 7, Foglio 6)
- Si trovi la tangente nel punto $(1,1)$ dell'insieme di punti del piano definito da $x^7+y^7-2=0$

- Si trovi la normale nel punto $(1,1,2)$ alla superifice immagine di
$(u,v)\mapsto(v\cos u, v\sin u, v^2),\ v>0$

- Si trovi il piano tangente alla sfera di centro $(1,1,1)$ e raggio 1 in $(1,\frac{1}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2})$.
- Si trovi la retta ortogonale alla regione $\{(x,y,z):\ \log(x^2+y^2+e)=e^z\}$ in $(0,0,1)$.

- Si trovi il tangente nel punto $(1,1,-1)$ dell'insieme di punti definito da $x^7+2y^7+z^7-2=0$ e $x^5+2y^5+z^3-2=0$

- Si calcoli l'angolo di incidenza che formano le seguenti coppie di regioni dello spazio incontrandosi nei punti rispettivamente indicati:

$\{(x,y,z):\ 2x^4+3y^3-4z^2=-4\}$, $\{(x,y,z):\ 1+x^2+y^2=z^2\}$, $(0,0,1)$;
$\{(x,y,z): x^2+y^2=e^z\}$, $\{(x,y,z): x^2+z^2=e^y\}$, $(1,0,0)$;
$\{(x,y,z):\ xy=z\ \}$, $\{(x,y,z):\ \cos(2\pi xy)=z\}$, $(1,1,1)$.

ESERCIZIO n.3 (Test di ingresso, seconda parte Settembre-Ottobre 2014, Esercizio 19)
Grazie al terorema del Dini, per (x, y) "vicino" a $(1, 2)$, il luogo di zeri

$$f(x, y) =: \ y \cdot 2^x \ + \ \sin\left(\pi \frac{x}{y}\right) - 5 = 0$$

definisce implicitamente x in funzione di y, $x = x(y)$, in modo che $f(x(y), y) = 0$. Calcolare $\dfrac{d\,x}{d\,y}(2)$.

ESERCIZIO n.4 (Prova in itinere di Autovalutazione, 15 Dicembre 2014, prima parte Esercizio 5) Si scriva l'equazione del piano normale in $(1, 1, 2)$ al luogo di zeri definito dalle equazioni $xyz = 2$, $xy + yz + xz = 5$.

ESERCIZIO n. 5 a- Si calcoli la derivata $\frac{dy}{dx}$ nei seguenti casi:
$x^3y - y^3x = a^2$, $\sin xy - e^{xy} - x^2y = 0$, $x^y = y^x$.

b- Si calcolino le derivate specificate per le seguenti relazioni:
$\frac{x^2}{a^2} + y^2b^2 + z^2c^2 = 1 : \ \frac{\partial z}{\partial x}$; $z^3 + 3xyz = a^3 : \ \frac{\partial z}{\partial x}$; $e^z - xy^2z = 0 : \ \frac{\partial z}{\partial y}$.

ESERCIZIO n.6 **a**-(Primo Appello 11 giugno 2015, prima parte Esercizio 4b)
Sia $f(x, y, z) = e^{xyz} - z\log(1 + x^2y^2)$.
(a) [omissis] ; (b) Detta $z = z(x, y)$ la funzione definita dall'equazione $f(x, y, z) = 1$ intorno al punto $(1, 1, 0)$, calcolare $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$.

b-(Secondo Appello 2 Luglio 2015, prima parte gruppo A Esercizio 4)
Sia $F(u, v) = (u - v, uv, u + v)$. Si determini l'equazione del piano tangente all'immagine di F nel punto $F(1, 1) = (0, 1, 2)$.

c-(Secondo Appello 2 Luglio 2015, prima parte gruppo A Esercizio 5)
Sia $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} e^x + y \\ xy \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Detta $\Psi(u, v) := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ l'inversa locale della restrizione di Φ ad un intorno del punto $(1, 1)$, si calcoli $\frac{\partial y}{\partial u}(e + 1, 1)$.

d-(Terzo Appello 2 Luglio 2015, prima parte, primo gruppo, Esercizio 3)
Si consideri la funzione $z = z(x, y)$ definita implicitamente, in un intorno di $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 0)$, dall'equazione $2y + x + \cos(x + y + z) - \sin(zxy) = 1 - \sqrt{\pi}$. Se ne calcoli la derivata $\dfrac{\partial z}{\partial y}(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$.

e-(Quarto Appello 11 Settembre 2015, prima parte, primo gruppo, Esercizio 4)
In quali punti l'insieme delle soluzioni di $\begin{cases} x^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 + z^2 &= 1 \end{cases}$ non è localmente un grafico?

ESERCIZIO n.7 (Secondo Appello 2 Luglio 2015, seconda parte gruppo A Esercizio 2(a))
Sia $S = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^3e^{-xy} = 8, \ z \geq 0\}$.
Si mostri che S è una 2-varietà con bordo e se ne determini il bordo bS.

ESERCIZIO n.8 (Terzo Appello 20 Luglio 2015, seconda parte Esercizio 1)
(a) Si studi l'intersezione dei grafici delle due funzioni

$$u(x,y) = x + y^2, \qquad v(x,y) = 2x^2 + 2y^4,$$

mettendo in risalto: se tale intersezione è limitata in $\mathbf{R}^3$, e se esistono punti nell'intorno dei quali essa non è sostegno di una curva regolare.
(b) Si disegnino in modo approssimativo ma esauriente gli insiemi di livello delle funzioni u e v sopra definite.
(c) Si individui sotto forma di luogo di zeri l'insieme dei punti del piano ove gli uni sono tangenti agli altri.

ESERCIZIO n. 9 (Quarto Appello 11 Settembre 2015, seconda parte Esercizio 1)
(a) Si mostri che la funzione $f(x,y,z,w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ sull'insieme definito da $g(x,y,z,w) = xyzw = 1$ assume come valore minimo 4, e se ne trovino i punti di minimo.
[Si osservi che $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \geq 2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{z^2+w^2} \geq 4\sqrt{xyzw}$. E le eguaglianze?]

Si consideri quindi il sottoinsieme Z di $\mathbf{R}^4$ definito da

$$Z = \{(x,y,z,w) : \ f(x,y,z,w) = 10, \ xyzw = 1\}.$$

(b) Si mostri che in un intorno del punto $(1,1,2,2)$ l'insieme Z è grafico delle (z,w) in funzione delle (x,y).

(c) Si determini il piano (bidimensionale) tangente a Z nel punto dato, e si calcoli $\frac{\partial w}{\partial x}_{|x=1,y=1}$.

(d) Si dica se nel diedro $x > 0, \ y > 0$, $z > 0, \ w > 0$ l'insieme Z è globalmente il grafico di una funzione vettoriale di due variabili.

ESERCIZIO n. 10 - Sia $f(x,y) = \binom{x^2-y^2}{2xy} = (u,v)$: si studi al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$, si studi l'immagine di f, .

- Si determinino le regioni ove il differenziale è invertibile.

• - Si determinino quindi le regioni ove la funzione è invertibile.

ESERCIZIO n. 11 a- Sia $f(x,y) = \binom{x^2-y^2}{xy} = (u,v)$: si trovi un intorno di $P_0 = (1,1)$ in cui f é iniettiva.

• b- Si calcolino le derivate parziali seconde in $U_0 = (0,1) = f(1,1)$ dell'inversa della funzione f ristretta a tale intorno.

ESERCIZIO n.12 a- Siano $f(x,y) = \binom{x^2}{y}$, $g(x,y) = \binom{x^3+xy}{y}$: se ne studino le immagini.

• b-Si studino le immagini delle regioni ove i differenziali non sono invertibili e come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$, $g^{-1}\{(u,v)\}$.

ESERCIZIO n. 13 a- Sia $f(x,y) = \binom{e^{x+y}-e^{x-y}-k^2x}{x+y} = (u,v),\ k \in \mathbf{R}$: si studi l'immagine di f e al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$.

b- Si determini un intorno di $(x,y) = (0,0)$ in cui f é iniettiva, ed quindi si calcolino (relativamente a tale intorno) $\frac{\partial x}{\partial u}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}(0,0)$.

ESERCIZIO n. 14 a- Sia $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2 \quad f(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) = \binom{2e^{x_1}+x_2y_1-4y_2+3}{x_2\cos x_1-6x_1+2y_1-y_3}$: si verifichi che in un intorno di $(0,1,3,2,7)$ la regione determinata dalle equazioni $f(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) = (0,0)$ é un grafico rispetto alle variabili (y_1,y_2,y_3).

b- Si calcoli $\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right)_{y_1,y_3}(3,2,7)$.

• c- É possibile esplicitare (x_1,x_2) in funzione di (y_1,y_2,y_3) in ogni punto dell'insieme $\{(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) : f(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) = (0,0)\}$?