Analisi Matematica II, Anno Accademico 2015-2016.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Vincenzo M. Tortorelli

APPUNTI Lezioni dal 25 Novembre 2015.

In considerazione della differenza tra la nozione di *superficie parametrica in* $\mathbf{R}^m$, vedi A2 def. 4.9.1 pagg. 366-371, e di *varietà in* $\mathbf{R}^m$ vedi lezioni del 13 e 25-26 Novembre 2015 e A2 def.4.11.1 Teo.4.11.2-3, def. 4.11.4, pagg. 412-16, possono essere utili le seguenti note.

Osservazione 1 : Si consideri una superficie regolare C^r parametrica $\sigma : T \to \mathbf{R}^m$, $A \subseteq \overline{A}$, A aperto connesso: ovvero σ di classe $C^r(T)$ con differenziale di rango massimo in A.

Come esposto, vedi le note alle lezioni del 5 e 6 Novembre 2015, esempio a pagina 4-5, già nel caso unidimensionale di cammini $\sigma(T)$ può non essere una varietà. Nel caso di cammini, ibidem pagina 7, se $T = [a; b]$ è chiuso e limitato e σ è C^1 regolare semplice invece $\sigma(T)$ è una varietà.

Nel caso di dimensione maggiore le veci della C^1 regolarità sono fatte dall'avere differenziale continuo di rango massimo su T, della semplicità dall'ipotesi che σ sia iniettiva su T, e le veci dell'intervallo chiuso dall'assumere che T sia compatto (chiuso e limitato in particolare $dist(T, \partial A) > 0$).

Nel caso l'inversa σ^{-1} è anch'essa *continua.*

Infatti (vedi corollario pagina 2 delle note sulla compattezza, lezione del 23 Ottobre 2015) σ trasforma chiusi di T che sono compatti in compatti che sono chiusi di $\sigma(T)$, in altri termini le preimmagini di σ^{-1} di chiusi di $\sigma(T)$ sono chiusi in T, che è una caratterizzazione della continuità, vedi note sui teoremi 'ponte' pagina 2,lezione del 21 Ottobre.

In altre parole per una superficie regolare C^r parametrica $\sigma : T \to \mathbf{R}^m$, *iniettiva su T compatto è una varietà* con una sola parametrizzazione.

Definzione 1.1: Un aperto A di $\mathbf{R}^m$ si dice con frontiera C^k regolare se la sua frontiera ∂A è una $m-1$-varietà C^k regolare in $\mathbf{R}^m$ (ovvero localmente luogo di zeri di una funzione a valori reali con differenziale di rango massimo, ovvero localmente grafico di una funzione reale di $m-1$ variabili). *E.g.* $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\}$.

Definzione 1.2: Un punto $p \in \partial A$, A aperto di $\mathbf{R}^m$, si dice *di bordo, C^k regolare,* se vi è un intorno U di p, per cui $\partial A \cap U$ è grafico di una funzione C^k di $m-1$ variabili *ed anche* $A \cap U$ è la parte in U di sottografico di tale funzione.

- Equivalentemente, per il teorema del Dini, vi è un intorno U' di p per cui $U' \cap \partial A$ è luogo di zeri, $\{q \in U' : f(q) = 0\}$ di f con $\nabla f \neq \mathbf{0}$ e C^k, le ipotesi del teorema del Dini, *ed anche* $A \cap U' = \{q \in U' : f(q) < 0\}$.
- La definizione di p punto di bordo regolare permette quindi di parlare di *normale esterna* in P alla frontiera: $\nu = \nabla f(x) |\nabla f(x)|^{-1}$.
- Grazie al teorema del rango la definizione 1.2 è anche equivalente a: vi è W intorno di p e un omeomorfismo C^k, con differenziale di rango massimo, tra W e una palla aperta di $\mathbf{R}^m$, che induce un omeomorfismo tra $A \cap W$ e la semipalla aperta, e tra $\partial A \cap W$ e la parte affine (piatta) della frontiera di questa semipalla.

Ciò porta alle definizioni di d-varietà Σ in $\mathbf{R}^m$ con bordo $b\Sigma$ (che è sempre una $d-1$-varietà senza bordo), e di 'normale esterna tangente' ad una varietà in un punto di bordo:

Notazione : $B^o_- = \{(u_1, \dots u_d) : u_d < 0,\ u_1^2 + \dots + u_d^2 < 1\}$, $\Gamma = \{(u_1, \dots u_{d-1}, 0) : u_1^2 + \dots + u_{d-1}^2 < 1\}$, $B_- = B^o_- \cup \Gamma$.

Definizione 2: Σ si dice d-varietà con bordo in $\mathbf{R}^m$ di classe C^k se per ogni $x^0 \in \Sigma$ si ha:

a- o esiste un intorno V di x^0 in $\mathbf{R}^m$ ed esiste una aperto A di $\mathbf{R}^d$ (carta locale) e una funzione $\Psi : A \to V \cap \Sigma$ bigettiva continua *con inversa continua*, C^k con differenziale di rango massimo (parametrizzazione locale). Nel caso si scrive $x^0 \in i\Sigma$.

b- o esiste un intorno V di x^0 in $\mathbf{R}^m$ e $\Psi : B_- \to V \cap \Sigma$ bigettiva continua *con inversa continua*, C^k con differenziale di rango massimo (parametrizzazione locale di bordo) $x^0 = \Psi(u^0)$, $u^0 \in \Gamma$, $\Psi(B^o_-) = V \cap i\Sigma$. Nel caso si scrive $x^0 \in b\Sigma$. L'insieme $b\Sigma$ è detto *bordo* di Σ.

Osservazione 2: - per una carta locale di bordo si ha $\Psi(\Gamma) = b\Sigma \cap V$ per definizione.
- $b\Sigma$ è quindi una $d-1$-varietà (*senza bordo!*) in $\mathbf{R}^m$.
- il vettore H tangente a Σ in $\tilde{x}$ dato da $\frac{\partial \Psi}{\partial u_d}(\tilde{u})$: intuitivamente punta all'esterno di Σ.

-Una definizione equivalente (grazie al teorema del rango) è la seguente: Σ si dice d-varietà con bordo se per ogni punto $x^0 \in \Sigma$ o vale **a** oppure vale

c- esistono: V intorno di x^0 in $\mathbf{R}^m$, A aperto di $\mathbf{R}^d$ e $T \subseteq \partial A$ $d-1$-varietà *senza bordo* in $\mathbf{R}^d$, $u^0 \in T$ punto di bordo regolare per A (Def. 1.2), $\Psi : A \cup T \to \Sigma \cap V$ bigettiva in modo che $x^0 = \Psi(u^0)$,
$\Psi(A) = i\Sigma \cap V$, Ψ sia continua con la sua inversa, C^k con differenziale di rango massimo.

- Grazie al teorema del Dini un'altra definizione equivalente: per ogni punto $x^0 \in \Sigma$ vale:
a′- o esistono: U intorno di x^0, ed $f : U \to \mathbf{R}^{m-d}$, C^k con differenziale di rango massimo per cui $U \cap \Sigma = \{x \in U : f(x) = \mathbf{0}\}$: in questo caso x^0 si scriverà $x^0 \in i\Sigma$.
b′- o esistono: U intorno di x^0, ed $(f, g) : U \to \mathbf{R}^{m-d} \times \mathbf{R}$, C^k, (f, g) ed f *entrambe* con differenziale di rango massimo , f su $U \cap \Sigma$, (f, g) su $\{x \in U : f(\mathbf{x}) = 0,\ g(x) = 0\}$, per cui
$U \cap \Sigma = \{x \in U : f(x) = \mathbf{0},\ g(x) \leq 0\}$, e $x^0 \in \{x \in U : f(x) = \mathbf{0},\ g(x) = 0\}$:
in questo caso x^0 si dirà punto di *bordo* di Σ, $x^0 \in b\Sigma$.

Osservazione 3: - Il semipiano $\{(x, y) : y < 0\}$ con la semiretta $\{(x, 0) : x < 0\}$ è una varietà con bordo. Mentre $\{(x, y) : y < 0\}$ con la semiretta $\{(x, 0) : x \leq 0\}$ *non è* una varietà con bordo. Ciò osservato conviene dare una definizione non usuale, non aggiunge nulla di nuovo concettualmente, ma con riscontri nella pratica evidenti:

Definzione 3: $\Sigma \subset \mathbf{R}^m$ di dirà d-varietà C^k a *bordi stratificati* se $\Sigma = \Sigma_d \cup \Sigma_{d-1} \cup \dots \cup \Sigma_0$ per cui Σ_k, $0 \leq k < d$, è bordo di Σ_{k+1}.

Definzione 4: *Vettori tangenti esterni nei punti di bordo.* Sia $x \in b\Sigma$.
Un vettore H tangente a Σ in x si dice *esterno* se, detta $\mathbf{H}^\perp$ la sua componente ortogonale al piano tangente a $b\Sigma$, si ha:
$\mathbf{H}^\perp \neq 0$, e per ogni curva regolare $\gamma : [0; \varepsilon[\to \Sigma$ tale che $\gamma(0) = x$ si ha $\langle \gamma'(0) \cdot \mathbf{H}^\perp \rangle_m \leq 0$

- un vettore J tangente a Σ in $x \in b\Sigma$ si dirà *normale esterno* se è normale al tangente a $b\Sigma$ e se per $\gamma : [0; \varepsilon[\to \Sigma,\ \ \gamma(0) = x$ si ha $\langle \gamma'(0) \cdot J \rangle_m \leq 0$.

Osservazione 4: - con la definizione $\mathbf{b}'$ di punto di bordo per $x^0 \in \Sigma$ si ha immediatamente che la proiezione ortogonale di $\nabla =: \nabla g(x^0)$ sul d-piano tangente a Σ in x^0 è un vettore *non nullo* tangente a Σ, nel punto di bordo x^0, esterno: $\nabla \perp Tan\ b\ \Sigma \subset Tan\Sigma$, la sua proiezione ortogonale su $Tan\Sigma$ non è nulla, essendo ∇ indipendente dagli ∇f_i. E per $\gamma(t) \in \Sigma$, $t \geq 0$, $\gamma(0) = x^0$ si ha $0 \geq g(\gamma(t)) = t\langle\gamma'(0) \cdot \nabla\rangle_m + o(t)$, dividendo per $t > 0$ e passando al limite per $t \to 0$ si ottiene la diseguaglianza desiderata..

- con le notazioni della definizione 5b si ha per una Ψ parametrizzazione locale di bordo che $H = \frac{\partial\Psi}{\partial u_d}(\tilde{u})$ è un vettore tangente a Σ in $\tilde{x} = \Psi(\tilde{u}) \in b\Sigma$ esterno. Infatti $Tan_{\tilde{x}}b\Sigma$ ha base $\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}(\tilde{u}), \ldots, \frac{\partial\Psi}{\partial u_{d-1}}(\tilde{u})$, quindi $\frac{\partial\Psi}{\partial u_d}(\tilde{u})$ ha componente normale $H^\perp \neq \mathbf{0}$ non nulla ($D_{\tilde{u}}\Psi$ ha rango massimo).
Se $\gamma(t)$, $t \geq 0$, è un cammino $\gamma(0) = \tilde{x}$ in Σ allora la sua preimmagine $\varphi(t) =: \Psi^{-1}(\gamma(t)) \in B_-$, $\varphi(0) = \tilde{u}$ quindi $\varphi'_d(0) \leq 0$. Quindi per la regola della catena

$$\langle\gamma'(0) \cdot H^\perp\rangle_m = \left\langle \sum_{i=1}^{d} \varphi'_i(0)\frac{\partial\Psi}{\partial u_i}(\tilde{u}) \cdot H^\perp \right\rangle_m = \varphi'_d(0)|H^\perp|^2_m \leq 0.$$

-consideriamo ora la definizione 5c: per definizione (Def. 1.2) di punto di bordo regolare, si assume che per ogni punto $u \in T$ vi è un intorno U di u in $\mathbf{R}^d$ e una funzione $g : U \to \mathbf{R}$ per cui $T \cap U = \{q : g(q) = 0\}$ e $A \cap U = \{q : g(q) < 0\}$, con g C^1 e gradiente non nullo. Per cui un vettore K di $\mathbf{R}^d$ sarà esterno ad A in $u \in T \subset \partial A$ se $\langle K \cdot \nabla g(u)\rangle_d > 0$;
- quindi se $\tilde{x} = \Psi(\tilde{u}) \in b\Sigma$, $\tilde{u} \in T \subseteq \partial A$, e K è esterno ad A in $\tilde{u}$ si avrà che $H =: d_{\tilde{u}}\Psi K = \dfrac{\partial\Psi}{\partial K}(\tilde{u})$ sarà tangente a Σ esterno al bordo in $\tilde{x} = \Psi(\tilde{u}) \in b\Sigma$. Si denota con $H^\perp$ la componente di H *normale* a $Tan_{\tilde{x}}b\Sigma$. Ci si riduce al calcolo precedente osservando che:

i- data una base ortonormale $\{\tau^1, \ldots, \tau^{d-1}\}$ di $Tan_{\tilde{u}}T$, si ha che $\{\tau^1, \ldots, \tau^{d-1}, \nu\}$, ove $\nu = \hat{\nabla}g(\tilde{u})$, è una base ortonormale di $\mathbf{R}^d$ a cui si riferiranno le coordinate;

ii- $Tan_{\tilde{x}}b\Sigma = d_{\tilde{u}}\Psi Tan_{\tilde{u}}T = span\left\{\dfrac{\partial\Psi}{\partial\tau^1}(\tilde{u}), \ldots, \dfrac{\partial\Psi}{\partial\tau^{d-1}}(\tilde{u})\right\}$;

iii- $H^\perp = \left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial K}(\tilde{u})\right)^\perp = \left(\langle K \cdot \nu\rangle_d\dfrac{\partial\Psi}{\partial\nu}(\tilde{u})\right)^\perp \neq \mathbf{0}$ poichè $d_{\tilde{u}}\Psi$ ha rango massimo;

iv- $\langle\gamma'(0) \cdot H^\perp\rangle_m = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{d-1} \varphi'_i(0)\dfrac{\partial\Psi}{\partial\tau_i}(\tilde{u}) + \varphi'_d(0)\dfrac{\partial\Psi}{\partial\nu}(\tilde{u})\right) \cdot H^\perp \right\rangle_m = \varphi'_d(0)\langle\dfrac{\partial\Psi}{\partial\nu}(\tilde{u}) \cdot H^\perp\rangle_m$

$= \varphi'_d(0)\langle K \cdot \nu\rangle_d \left|\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial\nu}(\tilde{u})\right)^\perp\right|^2_m \leq 0$

Definizione 5: *Mappe di transizione, cambiamenti di carta.*
Sia Σ una d-varietà in $\mathbf{R}^m$ di classe C^k (eventualmente con bordo).
Dato $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) \in \Sigma$ siano $A^1 \subseteq \mathbf{R}^d_u$, $A^2 \subseteq \mathbf{R}^d_s$ aperti connessi, *carte locali*, con parametrizzazioni locali di intorni in Σ di $\tilde{x}$:
$\Psi^1 : A^1 \to \Sigma \quad \Psi^1(u) = \Psi^1(u_1 \ldots u_d) = (x_1(u_1 \ldots u_d) \ldots, x_m(u_1 \ldots u_d)) = x(u), \quad \Psi^1(\tilde{u}) = \tilde{x}$
$\Psi^2 : A^2 \to \Sigma \quad \Psi^2(s) = \Psi^1(s_1, \ldots s_d) = (x_1(s_1, \ldots s_d) \ldots, x_m(s_1, \ldots s_d)) = x(s), \quad \Psi^2(\tilde{s}) = \tilde{x}$
che sono per definizione iniettive, con differenziali di rango massimo d e inverse, le funzioni *coordinate*, continue $(\Psi^1)^{-1}(x) =: U(x) = (U_1(x), \ldots U_d(x)))$, $(\Psi^2)^{-1}(x) =: S(x)$ continue. La funzione

$$P(s) = (P_1(s_1 \ldots s_d), \ldots P_d(s_1 \ldots s_d)) = (u_1(s), \ldots u_d(s)) = u(s) = (\Psi^1)^{-1}\left(\Psi^2(s)\right) = U(x(s))$$
$$P : S\left(\Psi^1(A^1) \cap \Psi^2(A^2)\right) \to U\left(\Psi^1(A^1) \cap \Psi^2(A^2)\right)$$

si dice *mappa di transizione* o cambiamento di carta, ovvero cambiamento di coordinate.

Si dirà *atlante* per Σ un insieme $\left\{(A^i, \Psi^i)\right\}$ di carte locali con rispettive parametrizzazioni locali, per cui $\left\{\Psi^i(A^i)\right\}$ ricopra Σ.

- Nel caso di varietà con bordo si può dare una definzione del tutto analoga, usando le carte locali di bordo.

Osservazione 5: - Nella pratica si ha spesso direttamente l'espressione analitica delle coordinate u in funzione delle coordinate s: $u = u(s) = P(s)$ e non sempre serve calcolare le inverse delle parametrizzazioni.
- Tale P è in effetti un cambiamento di coordinate curvilinee in $\mathbf{R}^d$. Essa e' invertibile ovviamente, piú delicato è convincersi che è almeno C^1. Nel caso la regola della catena garantisce che dP è un'applicazione lineare invertibile e che l'inversa di P è anch'essa C^1.

Osservazione 6: - Sia $\frac{\partial \Psi^1}{\partial u_1}(u), \ldots \frac{\partial \Psi^1}{\partial u_d}(u)$, $u \in U\left((\Psi^1(A^1) \cap \Psi^2(A^2))\right)$, che $\frac{\partial \Psi^2}{\partial s_1}(s), \ldots \frac{\partial \Psi^2}{\partial s_d}(s)$, $s \in S\left((\Psi^1(A^1) \cap \Psi^2(A^2))\right)$, è base (della giacitura) dello spazio tangente a Σ nei punti in $(\Psi^1(A^1) \cap \Psi^2(A^2))$. Per la regola della catena si ha $d\Psi^2 = dPd\Psi^1$, quindi la matrice del cambiamento lineare di coordinate dalla base data da $\frac{\partial \Psi^1}{\partial u_1}(u), \ldots \frac{\partial \Psi^1}{\partial u_d}(u)$ a quella data da $\frac{\partial \Psi^2}{\partial s_1}(s), \ldots \frac{\partial \Psi^2}{\partial s_d}(s)$ è la matrcie Jacobiana $d \times d$ di dP: $\left(\frac{\partial P_i}{\partial s_j}\right)$
- Se Σ è una 2-varietà in $\mathbf{R}^3$ e $(x, y, z) \in \Sigma$ è sia $(x, y, z) = \Psi^1(u, v)$ si a $(x, y, z) = \Psi^2(s, t)$ allora per via delle assunzioni fatte sia $\frac{\partial \Psi^1}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Psi^1}{\partial v}(u, v)$ sia $\frac{\partial \Psi^2}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \Psi^2}{\partial t}(s, t)$ sono vettori ortogonali non nulli (le parametrzzazioni sono di rango due) a Σ in (x, y, z). Quindi son uno multiplo dell'altro. È immediata la verifica per le proprietà del prodotto vettoriale che $\frac{\partial \Psi^2}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \Psi^2}{\partial t}(s, t) = det\, dP \cdot \frac{\partial \Psi^1}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Psi^1}{\partial v}(u, v)$.
- Quindi ogni parametrizzazione locale individua una direzione normale e si porta dietro l'area di un parallelogramma (la norma del prodotto vettore) e un verso nella direzione normale. Può darsi (se il determinante Jacobiano della funzione di transizione è negativo) che questo verso cambi da parametrizzazione locale a parametrizzazione locale dello stesso pezzetto di Σ.

Quindi se una 2-varietà in $\mathbf{R}^3$ ha un atlante di carte locali con mappe di transizione da carta a carta a determinante Jacobiano positivo, i prodotti vettori delle derivate parziali delle parametrizzazioni individuano tutti lo stesso verso nella direzione ortogonale al piano tangente alla 2-varietà.