

Presentazione di varietà in spazi euclidei

1

cfr. A2 cap 1.9 pag 60-81, A2 cap 4.7 pag 353-4, A2 cap 4.9 pag 366-371, A2 cap 4.11 pag 412-15

• Formula di dimensione di Grassman

se L è lineare $\dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L = \dim \text{dom } L$

se U e V sono sottospazi lineari $\dim U \cap V + \dim(U+V) = \dim U + \dim V$

• Motti

motto 1: (definizione di piano tangente ad un grafico)

la giacitura del piano tangente al grafico di f in $(x^0, f(x^0))$ è
il grafico di $d_{x^0} f$

motto 2: la giacitura del piano tangente all'insieme di livello $f(x^0)$ di f in x^0 è
il nucleo (insieme di livello 0) di $d_{x^0} f$

motto 3: la giacitura del piano tangente all'immagine di f in $f(x^0)$ è
l'immagine di $d_{x^0} f$

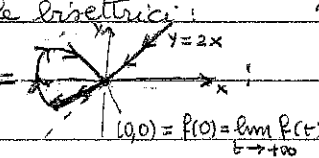
• Il primo motto è la definizione di piano tangente ad un grafico.

Perché i rimanenti sono "veri" ci vogliono ipotesi. Esempi:

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $x^0 = (0,0)$ $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 0\} = \{(0,0)\}$; non è uno-dimensionale in $(0,0)$

$f(x,y) = x^2 - y^2$ " $\{(x,y) : x^2 - y^2 = 0\}$ le due bisettrici; il tangente non è univoco in $(0,0)$

$f(x,y) = x^3 y - x y^3$ " $\{(x,y) : x^3 y - x y^3 = 0\}$ gli assi e le bisettrici; " " in $(0,0)$

$f(t) = \begin{cases} -2(t, 2t) & t \leq 0 \\ (\cos(\frac{\pi}{2} + 2\arctan t), \sin(\pi + 4\arctan t)) & t \geq 0 \end{cases}$ $\text{Im } f =$ 

[cfr. note del 5 e 6 novembre 2015, pag. 4]

Teorema del Dini 1 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $x^0 = (x^0, y^0) \in \Omega$ aperto di \mathbb{R}^2 , $f \in C^k(\Omega)$ $k \geq 1$, $L = \{(x,y) : f(x,y) = f(x^0, y^0)\}$
[A2 teo 1.9.2]

se $\nabla f(x^0, y^0) \neq (0,0)$ cioè $d_{(x^0, y^0)} f$ ha rango massimo (1);

i. (geometrica) $\exists U$ intorno di (x^0, y^0) ; $U \cap L$ è grafico di una funzione reale di una variabile C^k ;

per tanto si può definire la retta tangente a $U \cap L$ in (x^0, y^0) , che, interpretazione

geometrica di $\nabla f(x^0, y^0)$, ha equazione $(x-x^0) \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) + (y-y^0) \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) = 0$

Ovvero la retta tangente è $\text{Ker } d_{(x^0, y^0)} f + (x^0, y^0)$ [motto 2].

ii. (funzione implicite) Se $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$ $\exists W$ intorno di x^0 , $\exists V$ intorno di y^0 $\exists \varphi: W \rightarrow V$ ($U = W \times V$):

a) $\varphi(x^0) = y^0$ b) $\varphi \in C^k$ c) $W \times V \cap L = \text{graf } \varphi$ cioè $[x \in W \text{ e } y = \varphi(x)] \Leftrightarrow [f(x,y) = f(x^0, y^0) \text{ e } (x,y) \in W \times V]$

d) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ in $W \times V$ e $\begin{cases} \frac{d\varphi}{dx}(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} & x \in W \\ \varphi(x^0) = y^0 \end{cases}$ [Problema di Cauchy con φ soluzione UNICA]

Osservazione 1 La novità dell'asserto è nel fatto che "localmente vicino" a (x^0, y^0) l'insieme di livello sia un grafico di funzione di una variabile, C^k , quindi sostegno di un cammino regolare. Si è già visto (interpretazione geometrica del gradiente non nullo di una funzione differenziabile) che il gradiente di f non nullo è ortogonale (regole della catena) alle velocità di cammini con sostegni contenuti in un insieme di livello di f : $\gamma(t) = (x^0, y^0)$ e $\forall t$ $f(\gamma(t)) = f(x^0, y^0)$ derivato in $t=0$, per la regola della catena $\gamma_1'(0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) + \gamma_2'(0) \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) = 0$.

- Può essere che L sia un grafico rispetto alle variabile x ma $\nabla f(x, y) \equiv 0$ su L : $f(x, y) = (y-x)^2$, $L = \{(x, y) : (y-x)^2 = 0\}$ $\nabla f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix} \equiv 0$ su L , ma L è un grafico.
- La "località", ovvero non " L è un grafico" ma " $L \cap U$ è un grafico", è la giusta conseguenza:

$f(x, y) = x \sin y$, $L = \{(x, y) : x \sin y = 0\}$ $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos y \end{pmatrix}$, $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ su L ma L non è un grafico rispetto a x , $L = \mathbb{R} \times \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Si può provare che se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è C^k , $k \geq 2$ e $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ su $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$ allora $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$ è unione di grafici, rispetto alle variabile x , disgiunti.

- Si nota che per c) si ha in particolare $f(x, \varphi(x)) = f(x^0, y^0) \forall x \in W$.

Osservazione 2 Nel caso forse piuttosto $\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) \neq 0$ si avverte:

$\exists \tilde{V}$ intorno di y^0 $\exists \tilde{W}$ intorno di x^0 $\exists \psi: \tilde{V} \rightarrow \tilde{W}$ [$\tilde{U} = \tilde{W} \times \tilde{V}$]:

- a) $\psi(y^0) = x^0$ b) ψ è C^k c) $\tilde{W} \times \tilde{V} \cap L = \text{graf } \psi$ cioè $[y \in \tilde{V} \wedge x = \psi(y)] \Leftrightarrow [f(x, y) = f(x^0, y^0)]$ e $(x, y) \in \tilde{U}$
- d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0$ in $\tilde{W} \times \tilde{V}$ e $\begin{cases} \frac{d\psi}{dy} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\psi(y), y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\psi(y), y)} & y \in \tilde{V} \\ \psi(y^0) = x^0 \end{cases}$

Esempio $f(x, y) = x^2 + y^2$ $L = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ $(x^0, y^0) = (0, 1)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$ $|x| < 1$
 $(x^0, y^0) = (1, 0)$ $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 2 \Rightarrow x = \sqrt{1-y^2}$ $|y| < 1$

- Se sia $\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) \neq 0$ che $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$, allora in $W \times V \cap \tilde{W} \times \tilde{V} = (W \cap \tilde{W}) \times (V \cap \tilde{V})$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ quindi per il teorema degli zeri, essendo funzioni continue, sono di segno costante. Pertanto $\frac{d\psi}{dy}$ è di segno costante su $W \cap \tilde{W}$ per d), quindi ψ strettamente monotone in $W \cap \tilde{W}$, pertanto invertibile, e per c) ψ sarà la sua inversa.

È invalso l'uso di indicare ψ con $y = y(x)$, ovvero sottintendere la dipendenza da x , e similmente per ψ usare $x = x(y)$. Pertanto si avrebbe nei d)

$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} \\ y(x^0) = y^0 \end{cases}$ ovvero ai reciproci $\begin{cases} \frac{dx}{dy} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)} \\ x(y^0) = x^0 \end{cases}$

Osservazione 3 Le equazioni differenziali dei punti d), con le formule per le derivate delle funzioni implicite, si ricavano a posteriori, derivando rispetto a x (rispettivamente rispetto a y) la relazione di definizione $f(x, y) = f(x^0, y^0)$ e tenendo presente che y dipende da x (rispettivamente x dipende da y);

$f(x, y) = f(x^0, y^0)$ derivata totale rispetto a x , regole della catena:

$$(1) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}, \quad y(x^0) = y^0$$

• Calcolando in x^0 :

poiché $y(x^0) = y^0$ si calcola $\frac{dy}{dx}(x^0) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)}$ conoscendo $\nabla f, x^0, y^0$.

Si ribadisce che le "funzioni implicite" $y(x) = \varphi(x)$, $x(y) = \psi(y)$ sono di norma "implicite" cioè non si ha una formula per descriverle.

• Però continuando a derivare la relazione...

$$f(x, y) = f(x^0, y^0)$$

$$(1) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Calcolando in x^0 , poiché $y(x^0) = y^0$, e conoscendo già $\frac{dy}{dx}(x^0)$ si calcola $\frac{d^2 y}{dx^2}(x^0)$

• Iterando le procedure (e l'analogo eventuale per $\psi(y) = x(y)$) si ottengono $\frac{dy}{dx}(x^0), \dots, \frac{d^k y}{dx^k}(x^0)$ ovvero il polinomio di Taylor di $y = y(x)$ centrato in x^0 ; un approssimante ragionevole dell'ignota funzione $y = y(x)$

$$y(x) = y^0 + (x - x^0) \frac{dy}{dx}(x^0) + \dots + \frac{1}{k!} (x - x^0)^k \frac{d^k y}{dx^k}(x^0) + o((x - x^0)^k)$$

Esercizio Verificate le ipotesi si calcoli il polinomio di Taylor di $x = x(y)$ di centro $\frac{\pi}{2}$ e grado 2, per $x = x(y)$ definite intorno a $(0, \frac{\pi}{2})$ dalla relazione $xy \sin(x+y) - y = -\frac{\pi}{2}$

Raffinamento [A2 teo 1.9.5 p.64] $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $(x^0, y^0) \in \Omega$ aperto di \mathbb{R}^2 , $f \in C^k$ $k \geq 2$, $L = \{(x, y) : f(x, y) = f(x^0, y^0)\}$

Se $\nabla f(x^0, y^0) = (0, 0)$ si hanno i seguenti due casi

* $Hf(x^0, y^0)$ strettamente definito allora $\exists U$ intorno di (x^0, y^0) : $L \cap U = \{(x^0, y^0)\}$

** $\det Hf(x^0, y^0) \leq 0$ allora $\exists U$ intorno di (x^0, y^0) :

$L \cap U$ è unione di due grafici di funzioni C^1 passanti per (x^0, y^0) , le cui rette tangenti sono diverse e definite da

$$(x - x^0, y - y^0) \cdot Hf(x^0, y^0) \begin{pmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^0, y^0)(x - x^0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0, y^0)(x - x^0)(y - y^0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^0, y^0)(y - y^0)^2 = 0$$

Osservazione • * significa che $Hf(x^0, y^0)$ ha autovalori non nulli di segno concorde.

** significa che $Hf(x^0, y^0)$ ha autovalori non nulli di segno discorde.

È questo per l'ipotesi $f \in C^2$ e per il teorema di Schwarz nonché il teorema metrico per operatori simmetrici.

• $L \cap U$ ha un "cono tangente", formato da due rette che sono il cono di nullità o di isotropia della forma quadratica indotta dalla matrice simmetrica $Hf(x^0, y^0)$.

Esercizio

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2) - e^{\frac{2x^2 - 2y^2}{x^2 + 1}} \quad L = \{(x, y) : f(x, y) = f(0, 0)\}$$

calcolare se possibile le rette tangenti a L in $(0, 0)$.

Teorema del Dini 2 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $x^0 \in \Omega$ aperto di \mathbb{R}^N , $f \in C^k(\Omega)$, $k \geq 1$, $L = \{x \mid f(x) = f(x^0)\}$
 se $\nabla f(x^0) \neq 0$ cioè $d_{x^0} f$ ha rango massimo (1):

i- (geometrico) $\exists U$ intorno di x^0 : $U \cap L$ è grafico di una funzione reale di $N-1$ variabili, C^k ;
 pertanto si può definire l' piano tangente a $U \cap L$ in x^0 con l'equazione

$$(x_1 - x_1^0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) + \dots + (x_N - x_N^0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_N}(x^0) = 0$$
 cioè $(x - x^0) \cdot \nabla f(x^0) = 0$,
 ovvero l' $(N-1)$ -piano tangente è $\text{Ker } d_{x^0} f = \mathbb{R}^0$ [MOTO 2] [F. GRASSMANN]

ii- (funzioni implicite) Se $\frac{\partial f}{\partial x_\sigma}(x^0) \neq 0$ posto $x_z = (\dots, x_{z-1}, x_{z+1}, \dots) \in \mathbb{R}^{N-1}$, coordinate diverse da x_σ ,
 $\exists W \subset \mathbb{R}^{N-1}$ intorno di x_z^0 $\exists V \subset \mathbb{R}$ intorno di x_σ^0 $\exists \varphi: W \rightarrow V$; $U = \{x \mid x_z \in W \text{ e } x_\sigma \in V\}$

a) $\varphi(x_z^0) = x_\sigma^0$ b) $\varphi \in C^k$ c) $U \cap L = \{x \mid \varphi(x_z) = x_\sigma\} \sim \text{graf } \varphi$
 cioè $[x_z \in W \text{ e } x_\sigma = \varphi(x_z)] \Leftrightarrow [f(x) = f(x^0) \text{ e } x_z \in W \text{ e } x_\sigma \in V]$

d) $\frac{\partial f}{\partial x_\sigma}(x) \neq 0$ per $x \in U$ e per $j \neq \sigma$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial x_\sigma}{\partial x_j} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)}{\frac{\partial f}{\partial x_\sigma}(x)} & \text{con } x_\sigma = \varphi(x_z) \text{ per ogni } x_z \in W \\ \varphi(x_z^0) = x_\sigma^0 \end{cases}$$
 [Equazione differenziale nell'incognita $\varphi = \varphi(x_z)$]

Osservazione 4 Valgono osservazioni analoghe a quelle puntualizzate per l'enunciato del Teorema del Dini in due variabili:

• Nel caso $\sigma = N$: $x_z = (x_1, \dots, x_{N-1})$, $U = W \times V$, $W \times V \cap L = \text{graf } \varphi$, e per d)

per $j \leq N$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{N-1}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{N-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{N-1}))}{\frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_{N-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{N-1}))} & \text{per ogni } (x_1, \dots, x_{N-1}) \in W \\ \varphi(x_1^0, \dots, x_{N-1}^0) = x_N^0 \end{cases}$$

• Vale la pena ribadire che la "funzione implicita" $\varphi(x_z) = x_\sigma(x_z)$ di solito non è esplicitabile, ma derivando rispetto a x_j , $j \neq \sigma$, la relazione

$f(x) = f(x^0)$ ove $x_\sigma = \varphi(x_z)$ si ottiene per la regola delle catene d):

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \sigma}}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_\sigma}(x) \frac{\partial x_\sigma}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial f}{\partial x_\sigma}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_z) = 0 \quad (1)$$

calcolando per $x_z = x_z^0$, poiché $x_\sigma^0 = \varphi(x_z^0)$, si ottiene $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_z^0)$; quindi iterando si ottengono tutte le derivate parziali di ordine minore o uguale a k di φ in x_z^0 . Usando gli sviluppi di Taylor in più variabili un polinomio che approssima φ !

Per esempio derivando (1) rispetto a x_h , $h \neq \sigma$, considerando $x_\sigma = \varphi(x_z)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_j}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_\sigma \partial x_j}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}(x_z) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_\sigma}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_z) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_\sigma^2}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}(x_z) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_z) + \frac{\partial f}{\partial x_\sigma}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \partial x_j}(x_z) = 0 \quad (2)$$

Notazioni • A matrice: A^j j^a colonna, A_i i^a riga, $\overset{\times k}{\underset{\times h}{A}}$ cancella h^a riga e k^a colonna

• $A^{M \times N}, v \in \mathbb{R}^M$ $A(v/A^k)$ matrice ottenuta sostituendo ad A^k le coordinate di v in colonna.

• regola di Cramer $Au = v \quad u = A^{-1}v \quad A^{-1} = (-1)^{i+j} \frac{\det \overset{\times j^o}{\underset{\times i^o}{A}}}{\det A}$

$$u_i = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v_j \det \overset{\times j^o}{\underset{\times i^o}{A}} \cdot \frac{1}{\det A} \quad \begin{matrix} * \text{ sviluppo del determinante} \\ \text{secondo la } i^a \text{ colonna} \\ \text{della matrice } A(v/A^i) \end{matrix}$$

$$u_i = \frac{\det A(v/A^i)}{\det A}$$

• Cramer nei matrici

$AU = V, U = A^{-1}V$ prodotto righe per colonne $U^j = (A^{-1})^j V^j$

$$U_i^j = \frac{\det A(V^j/A^i)}{\det A}$$

• multindici $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \mathbb{N}^k$ k lunghezza del multindice
 $\sigma_1 + \dots + \sigma_k = |\sigma|_t = |\sigma|$ peso del multindice

• $x \in \mathbb{R}^N$ $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_M)$ $M < N, \sigma_{j+1} \geq \sigma_j \geq 1$ con $\Delta_\sigma \in \mathbb{R}^M$ si denotano le coordinate $(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_M})$ di x corrispondenti alle sue proiezioni ortogonali sull' M -piano coordinato generato da $(e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_M})$.

• $A^{M \times N}$ σ multindice, $\sigma_{j+1} \geq \sigma_j \geq 1$, di lunghezza $\leq N$ con A^σ si intende la sottomatrice con le colonne $A^{\sigma_1} \dots A^{\sigma_k}$ nell'ordine.

• $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ Ω aperto di \mathbb{R}^N \vec{f} differenziabile in p , σ come sopra.

$$D^\sigma \vec{f}(p) =: J^\sigma \vec{f}(p) =: \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_\sigma}(p) = (Df(p))^\sigma = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_{\sigma_1}}(p) \mid \dots \mid \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_{\sigma_k}}(p) \right) \quad M \times k$$

ovvero la matrice associata al differenziale di f ristretto a $p + \text{SPAN}\{e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_k}\} = R: d_p(f|_R): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^M$

[Cfr. note sul gradiente tangenziale pagine 1, 2: 18, 19 Novembre 2015]

Teorema del Dini 3 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M, x \in \Omega$ aperto di $\mathbb{R}^N, f \in C^k, N \geq M, L = \{x \mid f(x) = f(x^0)\}$
 [A2. teo. 1.9.6 72-6]

se $Df(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \dots \frac{\partial f}{\partial x_N}(x^0) \right)_{M \times N}$ ha rango massimo (M):

i- (geometria) $\exists U$ intorno di x^0 ; $U \cap L$ è grafico di m funzioni a valori in \mathbb{R}^M di $N-M$ variabili, e C^k

per tanto si può definire l' $(N-M)$ -piano tangente a $U \cap L$ in x^0 con le M

equazioni
$$\begin{cases} (x_1 - x_1^0) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) + \dots + (x_N - x_N^0) \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x^0) = 0 \\ \vdots \\ (x_1 - x_1^0) \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(x^0) + \dots + (x_N - x_N^0) \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(x^0) = 0 \end{cases} \quad \text{i.e. } (x - x^0) \cdot \nabla f(x^0) = 0$$

ovvero l' $(N-M)$ -piano tangente è $\text{Ker } d_{x^0} f + \Delta^0$ [NOTO 2] [GRASSMANN]

ii- (funzioni implicite) se $\det \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma}}(x^0) \neq 0, \sigma = (\sigma_1 \dots \sigma_M), \tau = (\tau_1 \dots \tau_{N-M}) : \{1, \dots, N\} = \{\sigma_i\} \cup \{\tau_j\}$

$\exists W$ intorno di x^0_{τ} in $\mathbb{R}^{N-M}, \exists V$ intorno di x^0_{σ} in $\mathbb{R}^M, \exists \varphi: W \rightarrow V, U = \{x \mid x_{\tau} \in W, x_{\sigma} \in V\}$

a) $\varphi(x^0_{\tau}) = x^0_{\sigma}, b) \varphi \in C^k, c) U \cap L = \{x \mid \varphi(x_{\tau}) = x^0_{\sigma}\} \sim \text{graf } \varphi$

cioè $[x_{\tau} \in W \text{ e } x_{\sigma} = \varphi(x_{\tau})] \Leftrightarrow [f(x) = f(x^0) \text{ e } x_{\tau} \in W \text{ e } x_{\sigma} \in V]$

d) $\det D^{\sigma} f(x)$ per $x \in U$ e si ha che $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_M)$ soddisfa le equazioni differenziali per $1 \leq j \leq M$

$$\frac{\partial x_{\sigma_i}}{\partial x_{\tau_j}} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{\tau_j}}(x_{\tau}) = - \left(\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma}}(x) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_{\tau_j}}(x) \quad \text{con } x_{\sigma} = \varphi(x_{\tau}) \text{ per ogni } x_{\tau} \in W$$

ovvero per $1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N-M$

$$\frac{\partial x_{\sigma_i}}{\partial x_{\tau_j}} = - \frac{\det \left(\dots \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_i}}(x) / \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_i}}(x) \dots \right)}{\det \left(\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma}}(x) \right)}$$

ovvero in forma matriciale compatta, con notazione $D^{\sigma} f$ piuttosto che $\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma}}$ si ha:

$$d_{x_{\tau}} \varphi \sim D\varphi(x_{\tau}) = - (D^{\sigma} f(x))^{-1} (D^{\tau} f(x)) \quad x_{\sigma} = \varphi(x_{\tau}), x_{\tau} \in W$$

Osservazione 5. Valgono osservazioni analoghe a quelle relative ai precedenti enunciati.

- Nel caso $\sigma = (N-M+1, \dots, N)$ si ha $\tau = (1, \dots, N-M)$, $U = W \times V$
 $W \times V \cap L = \text{graf } \varphi$ e per d) :

$$\forall i \in \{1, \dots, N-M\} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_{\tau}) = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_{N-M+1}}(x_{\tau}, \varphi(x_{\tau})) \mid \dots \mid \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}(x_{\tau}, \varphi(x_{\tau})) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_{\tau}, \varphi(x_{\tau})) \quad \forall x_{\tau} \in W$$

- Va osservato che le scritte $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$ è di per sé, se $M > 1$, ambigue se non si specificano, oltre a x_0 , le altre variabili indipendenti.

In fatti si tratta di vedere la stessa pendenza da diverse angolazioni.
 Si consideri il seguente semplice caso lineare

$$f(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x + y + z + 2w \\ x - y + z - w \end{pmatrix} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$L = (x, y, z, w) : \begin{cases} x + y + z + 2w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases}$$

Si ha da una parte $(y, w) = (3x + 3z, -2x - 2z) : \frac{\partial w}{\partial x} = -2$ se (x, z) indipendenti
 d'altra parte $(z, w) = (\frac{y}{3} - x, -\frac{2}{3}y) : \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ se (x, y) indipendenti

- Per questo è in uso la seguente notazione,
 dato un set di variabili x_1, \dots, x_N , con dipendenza dato da
 $\{f(x_1, \dots, x_N) = z^0 \in \mathbb{R}^M\}$, per cui Df. sia di rango massimo,
 si scrive

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right)_{x_1, \dots, x_{N-M-1}} \quad \text{intendendo che le variabili indipendenti sono } x_j, x_1, \dots, x_{N-M-1}$$

Esercizio: trovare un esempio ancora più semplice per cui $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$ cambia al cambiare della scelta delle variabili indipendenti.

Osservazione 6. un'interpretazione del teorema del Dini in forma generale è la seguente:

dato il sistema di M equazioni in N incognite, $N > M$

$$\textcircled{N} \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_N) = z_1^0 \\ \vdots \\ f_M(x_1, \dots, x_N) = z_M^0 \end{cases} \quad \textcircled{N} \text{ non lineare}$$

• se si conosce una soluzione $x^0 = (x_1^0, \dots, x_N^0)$

•• se il sistema lineare $M \times N$

$$\textcircled{L} \begin{cases} u_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) + \dots + u_N \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x^0) = 0 \\ \vdots \\ u_1 \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(x^0) + \dots + u_N \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(x^0) = 0 \end{cases} \quad \textcircled{L} \text{ lineare}$$

ha insieme alle soluzioni con $N-M$ gradi di libertà
allora

le soluzioni di \textcircled{N} abbastanza vicine a x^0
hanno $N-M$ gradi di libertà.

Esercizio

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} 2e^{x_1} + x_2 y_1 - 4y_2 + 3 \\ x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x^0 = (0, 1, 3, 2, 7)$$

Mostrare che intorno a x^0 la condizione $f(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = f(x^0)$

definisce $\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, y_2, y_3) \\ x_2 = x_2(y_1, y_2, y_3) \end{cases} =: \varphi(y_1, y_2, y_3)$. Calcolare

$$D\varphi(3, 2, 7)$$

Osservazione 7. Nel punto i del teorema del Dini generale la condizione $DF(x^0) M \times N$, $M \leq N$ di rango massimo (M) si può esprimere $\det DF(x^0) \neq 0$ ovvero $\det \underbrace{DF(x^0)}_{M \times M} \nabla f(x^0) \neq 0$

Teorema del Rango $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$, $x^0 \in \Omega$ aperto in \mathbb{R}^N , $M \geq N$, $f \in C^k$,
 [A2 teo 1.9.12 p. 77-81]

se $Df(x^0)$ ha rango massimo (N)

ovvero $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x^0)$ sono indipendenti in \mathbb{R}^M
 ovvero $\det Df(x^0) Df(x^0) \neq 0$

allora

$\exists \tilde{U}$ intorno di x^0 per cui a.0 $\det Df(x) Df(x) \neq 0$ per $x \in \tilde{U}$
a.1 $f|_{\tilde{U}} = g$ è iniettiva a.2 ha inverse continua.

b.1 $\text{Im } g = \text{Im } f|_{\tilde{U}}$ è grafico di una funzione di N variabili
 su valori in \mathbb{R}^{M-N} e C^k

b.2 pertanto si può definire il lo
 N -piano tangente ad $\text{Im } f|_{\tilde{U}}$ in $f(x^0)$

come $\text{Im } d_{x^0} f + f(x^0)$ [Motto 3]

\subseteq in particolare una base della giacitura del piano tangente
 è data da $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x^0)$ in \mathbb{R}^M : cioè

$$\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) + \dots + \lambda_N \frac{\partial f}{\partial x_N}(x^0) + f(x^0) = Df(x^0) \underline{\lambda} + f(x^0)$$

al vettore $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^N$ da una parametrizzazione
 dell' N -piano tangente.

Osservazione 8. Se $N=2$ e $M=3$ l'equazione del piano

tangente è quindi $((x, y, z) - f(u^0, v^0)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u^0, v^0) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u^0, v^0) \right) = 0$
 cioè $\det \begin{pmatrix} x - f_1(u^0, v^0) & \frac{\partial f_1}{\partial u}(u^0, v^0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u^0, v^0) \\ y - f_2(u^0, v^0) & \frac{\partial f_2}{\partial u}(u^0, v^0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u^0, v^0) \\ z - f_3(u^0, v^0) & \frac{\partial f_3}{\partial u}(u^0, v^0) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(u^0, v^0) \end{pmatrix} = 0$

- La novità non è nel dire che $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x^0)$ siano vettori tangenti (cfr. note i, ii, iii pag 1 "gradiente tangenziale", 13 novembre) essendo velocità di cammini $f(x^0 + t e_i)$, ma nel dire che $\text{Im } f|_{\tilde{U}}$ è un grafico di una funzione differenziabile, per cui si può definire il piano tangente!

$N=M$

Teorema di Invertibilità locale: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N, x^0 \in \Omega$ aperto di $\mathbb{R}^N, f \in C^k$
 [A2 teo 1.9.10 p. 72-5]

se $Df(x^0)$ ha rango massimo, cioè
 $d_{x^0} f$ è invertibile, cioè
 $\det Df(x^0) \neq 0$

allora

$\exists \tilde{U}$ intorno di $x^0, \exists \tilde{V}$ intorno di $f(x^0)$: ao $\det Df(x) \neq 0$ per $x \in \tilde{U}$.

a.1 $f: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ è bigettiva a.2 ha inverse continua

come conseguenza delle regole della catena e della regola di Cramer
 si ha che $(f|_{\tilde{U}})^{-1}$ è differenziabile in \tilde{V} e

$$d_z (f|_{\tilde{U}})^{-1} = \left(d_z f \right)^{-1} \quad \text{per } z \in \tilde{V}$$

ovvero

posto $x = f^{-1}(z)$ per $z \in \tilde{V}$

$$\frac{\partial x_i}{\partial z_j}(z) = (-1)^{i+j} \frac{\det(Df(x) \text{ con } x_j^o \text{ cancellato})}{\det(Df(x))} =$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial z_j}(z) = (-1)^{i+j} \frac{\det \begin{pmatrix} \dots & f_{i-1} & f_{i+1} & \dots \\ \dots & x_{i-1} & x_{i+1} & \dots \end{pmatrix}}{\det Df(x)}$$

Osservazione 9. Interpretazione: il sistema con N equazioni e N incognite e N parametri z

Ⓝ
$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_N) = z_1 \\ \vdots \\ f_N(x_1, \dots, x_N) = z_N \end{cases}$$

ha almeno una soluzione x^0 per i parametri z^0 e il sistema lineare

Ⓛ
$$\begin{cases} u_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) + \dots + u_N \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x^0) = 0 \\ \vdots \\ u_1 \frac{\partial f_N}{\partial x_1}(x^0) + \dots + u_N \frac{\partial f_N}{\partial x_N}(x^0) = 0 \end{cases} \quad \text{ha un' unica soluzione } u = 0$$

allora per z abbastanza vicino a z^0 , Ⓝ ha un' unica soluzione vicina a x^0
 $\exists \tilde{U}(x^0), \tilde{V}(z^0) \forall z \in \tilde{V} \exists ! x \in \tilde{U} : f(x) = z$.

Definizione $E \subseteq (X, d)$ spazio metrico
 $F \subseteq (Y, \delta)$ " "
 $f: E \rightarrow F$

si dice omeomorfismo tra E ed F se ① è biettiva tra E e F
 ② è continuo da E in F
 ③ lo è le sue inverse da F in E

Corollario 1 (dal teorema del Dini)

[A2 def. 4.11.1, teo 4.11.2 p. 412-14] E è una $(N-M)$ -varietà C^k in \mathbb{R}^N , $N > M$
 se e solo se $\forall p \in E \exists U$ intorno di p in $\mathbb{R}^N \exists f: U \rightarrow \mathbb{R}^M$
 $d_p f$ ha rango massimo (M)
 $E \cap U = \{q \in U : f(q) = f(p)\}$

\Rightarrow Diretto dalle definizioni di $(N-M)$ -varietà:

$\forall p \in E \exists U$ intorno di p , $\exists A \subset V$ sottospazio $N-M$ dimensionale
 $\exists W: \mathbb{R}^N = V \oplus W \quad W \perp V$
 $\exists \varphi: A \rightarrow W \quad C^k$

$E \cap U = \{a + \varphi(a) : a \in A\} = \text{grafico di } \varphi$

Lo si pone $f(q) = \pi_{\perp}^W(q) - \varphi(\pi_{\perp}^V(q))$ essendo π_{\perp} le proiezioni ortogonali sui rispettivi sottospazi

\Leftarrow È il teorema del Dini.

Corollario 2 (dal teorema del Rango)

[A2, teo 4.11.3 p. 412-14] E è una N -varietà C^k in \mathbb{R}^M , $M > N$

se e solo se $\forall p \in E \exists U$ intorno aperto di p in \mathbb{R}^M
 $\exists \tilde{U}$ aperto di \mathbb{R}^N , $f: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^M: C^k$ tale che

a f è continua iniettiva, ed è un omeomorfismo con $f(\tilde{U})$

b $d_x f$ ha rango massimo per $x \in \tilde{U}$

c $U \cap E = f(\tilde{U})$

\Rightarrow Diretto dalle definizioni di N -varietà (cfr. supra) $f(a) = a + \varphi(a)$
 $\tilde{U} = A$

\Leftarrow È il teorema del rango.