Analisi Matematica II, Anno Accademico 2015-2016.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale
Vincenzo M. Tortorelli

APPUNTI Lezione del 2-3 Dicembre 2015

LE FORMULE DI TAYLOR IN PIÙ VARIABILI

DERIVATE DIREZIONALI ITERATE

Se $v \in \mathbf{R}^d$ è non nullo è definito *l'operatore differenziale di derivazione* rispetto a v, che associa ad una funzione f di d variabili la sua eventuale derivata direzionale lungo v:

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) f\right)(x) \;=\; \frac{\partial f}{\partial v}(x) =: \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \rho v}(x) = \rho \frac{\partial f}{\partial v}(x)\,,\ \rho \neq 0.$$

Se una funzione f è differenziabile in x si ha: $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial v}(x) \;=\; d_x f\, v \;=\; \langle \nabla f(x), v\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$

Se $g(t) =: f(x+tv)$ si ha per la regola della catena: $\displaystyle g'(t) \;=\; \frac{\partial f}{\partial v}(x+tv) \;=\; (v\cdot\nabla) f(x+tv).$

Si osserva che si ottiene *un polinomio omogeneo di primo grado*, cioè un *funzione lineare omogenea*, nelle variabili $v_1, \ldots, v_d$ delle coordinate di v. Nel caso si usa la notazione:

$$\frac{\partial}{\partial v} \;=\; v\cdot\nabla\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(x) \;=\; v\cdot\nabla f(x) \;=\; (v\cdot\nabla) f(x).$$

Se f è due volte differenziabile iterando questo tipo di derivata, e per v indipendente da x :

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) f\right)\right)(x) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x) \;=\; \frac{\partial}{\partial v}\left(\sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} v_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, x_i}(x)$$

cioè, denotando con $Hf(x)$ la matrice Hessiana delle derivate parziali seconde in x:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x) \;=\; \langle v, Hf(x) v\rangle \;=\; {}^t v\cdot Hf(x) v.$$

Si osserva che si ottiene un *polinomio omogeneo di secondo grado*, cioè *una quadrica omogenea* nelle d variabili $v_1, \ldots, v_d$ che danno le coordinate di v.

Si useranno quindi anche le notazioni:

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v} = \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 \;=\; \frac{\partial^2}{\partial v^2} \;=\; (v\cdot\nabla)^2\,.$$

Se si definisce $g(t) =: f(x+tv)$ si ha per la regola della catena:

$$g''(t) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v} f\right)(x+tv) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x+tv) \;=\; (v\cdot\nabla)^2 f(x+tv).$$

Iterando h volte si useranno le notazioni: $\dfrac{\partial}{\partial v}\dots\dfrac{\partial}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial}{\partial v}\right)^h = \dfrac{\partial^h}{\partial v^h} = (v\cdot\nabla)^h$.
Se si definisce $g(t) =: f(x+tv)$ si ha per la regola della catena iterata h volte :

$$\frac{d^h g}{dt^h}(t) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^h f\right)(x+tv) = \frac{\partial^h f}{\partial v^h}(x+tv) = (v\cdot\nabla)^h f(x+tv)$$

quindi per $t=0$

$$(v\cdot\nabla)^h f = \left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+v_d\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^h f = (v\cdot\nabla)^{h-1}\left(\sum_{i=1}^d v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^d v_i\,(v\cdot\nabla)^{h-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Anche in questo caso si ottiene un *polinomio omogeneo di grado* h, nelle d variabili $v_1,\ldots,v_d$ che danno le coordinate di v.

Per metter in evidenza la natura polinomiale, nelle coordinate della direzione, di queste derivate direzionali successive conviene usare anche le notazioni relative ai multi-indici.

FORMULA DI TAYOLR CON RESTO INTEGRALE PER FUNZIONI DI UNA VARIABILE

LEMMA Sia $g: I\to\mathbf{R}$, $0\in I$ intervallo, $C^{k-1}(I)$, $k\geq 2$. Si ha:

$$g(t) = g(0)+g'(0)t+\ldots\frac{1}{(k-2)!}g^{(k-2)}(0)t^{k-2}+\int_0^t\frac{1}{(k-2)!}g^{(k-1)}(\tau)(t-\tau)^{k-2}\,d\tau$$

DIM. Per il teorema fomdamentale del calcolo: $g(t) = g(0)+\int_0^t g'(\tau)\,d\tau$, integrando per parti: $g(t) = g(0)+(\tau-t)g'(\tau)]_0^t+\int_0^t(t-\tau)g''(\tau)\,d\tau = g(0)+tg'(0)+\int_0^t(t-\tau)g''(\tau)\,d\tau$.
Ancora $g(t) = g(0)+tg'(0)+\left(-\frac{1}{2}(t-\tau)^2g''(\tau)\right)\Big]_0^t+\int_0^t\frac{(t-\tau)^2}{2}g'''(\tau)\,d\tau$.
Per induzione: da $g(t) = g(0)+g'(0)t+\ldots+\dfrac{1}{(k-3)!}g^{(k-3)}(0)t^{k-3}+$

$+\displaystyle\int_0^t\frac{1}{(k-3)!}g^{(k-2)}(\tau)(t-\tau)^{k-3}\,d\tau$

integrando per parti:

$$g(t) = g(0)+g'(0)t+\ldots+\frac{1}{(k-3)!}g^{(k-3)}(0)t^{k-3}+\left(-\frac{1}{k-2}(t-\tau)^{k-2}\frac{1}{(k-3)!}g^{k-2}(\tau)\right)\Big]_0^t+$$
$$\int_0^t\frac{1}{(k-3)!}g^{(k-1)}(\tau)\frac{1}{k-2}(t-\tau)^{k-2}\,d\tau =$$
$$g(0)+g'(0)t+\ldots\frac{1}{(k-3)!}g^{(k-3)}(0)t^{k-3}+t^{k-2}\frac{1}{(k-2)!}g^{k-2}(0)+\int_0^t\frac{1}{(k-2)!}g^{(k-1)}(\tau)(t-\tau)^{k-2}\,d\tau$$

FORMULA DI TAYOLR DIREZIONALE PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

TEOREMA Sia $f:\Omega\to\mathbf{R}$, $\mathbf{x}^0\in\Omega$ aperto in $\mathbf{R}^d$, $f\in C^{k-1}(\Omega)$, e differenziabile k volte in $\mathbf{x}^0$ (le derivate parziali di ordine $k-1$ differenziabili in $\mathbf{x}^0$). Allora

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{h=0}^k\frac{1}{h!}\ \left((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla\right)^h f(x^0)\ +\ o(|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}|^k)$$

intendendo, come nella definizione di differenziabilità, che il comportamento asintotico del resto, per $\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0$, dipende solo da $\mathbf{x}^0$ e da $|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}|$, ma non da $\mathbf{x}^0-\mathbf{x}$.

DIM. Sia $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$, $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{x}-\mathbf{x}^0}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|}$, $t = |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|$. Pertanto $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$.
Sia $g(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$.
Se si usasse lo sviluppo usuale di $g(t)$
$f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) = g(t) =$
$= g(0)+g'(0)t+\dots \dfrac{1}{k!}g^k(0)t^k+\bar{o}(t^k) = f(\mathbf{x}^0)+(\mathbf{v}\cdot\nabla)f(\mathbf{x}^0)t+\ldots+\dfrac{1}{k!}\left((\mathbf{v}\cdot\nabla)\right)^k f(\mathbf{x}^0)t^k+\bar{o}(t^k)$
si otterrebbe in termini di f e delle variabili usuali:
$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla f(\mathbf{x}^0) + \ldots + \dfrac{1}{k!}\Big((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla)\Big)^k f(\mathbf{x}^0) + \bar{o}(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k)$
con resto $\bar{o}$ a priori dipendente dalla direzione $\mathbf{v}$, ovvero da $\mathbf{x}$ oltre che da $\mathbf{x}^0$ e $t = |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|$, in quanto g dipende da sia da $\mathbf{x}^0$ che da $\mathbf{x}$. Per determinare l'indipendenza dell'andamento asintotico, per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$, di $\bar{o}$ dalla direzione $\mathbf{v}$, si dovrà usare la definizione di Frechet differenzaibilità in $\mathbf{x}^0$ delle derivate di ordine $k-1$, e per ricondursi a ciò usare il resto integrale di g:
$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) = g(t) =$
$= g(0) + g'(0)t + \dots \dfrac{1}{(k-2)!}g^{(k-2)}(0)t^{k-2} + \displaystyle\int_0^t \dfrac{1}{(k-2)!}g^{(k-1)}(\tau)(t-\tau)^{k-2}\,d\tau =$
$= f(\mathbf{x}^0) + (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla f(\mathbf{x}^0) + \ldots + \dfrac{1}{(k-2)!}\Big((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla)\Big)^{k-2} f(\mathbf{x}^0)+$
$+\displaystyle\int_0^t \dfrac{1}{(k-2)!}\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)^{k-1} f(\mathbf{x}^0+\tau\mathbf{v})(t-\tau)^{k-2}\,d\tau$
Usando la Frechet differenzibilità di $\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)^{k-1} f(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$ si ottiene
$\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)^{k-1} f(\mathbf{x}^0+\tau\mathbf{v}) = \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)^{k-1} f(\mathbf{x}^0) + \tau(\mathbf{v}\cdot\nabla)\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)^{k-1} f(\mathbf{x}^0) + o(|\tau|)$
ove per definizione di Frechet differenziabilità il comportamento asintotico del resto $o(|\tau|)$ è indipendente da $\mathbf{v}$. Sostituendo si ha
$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) =$
$f(\mathbf{x}^0) + (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla f(\mathbf{x}^0) + \ldots + \dfrac{1}{(k-2)!}\Big((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla)\Big)^{k-2} f(\mathbf{x}^0)+$
$+\displaystyle\int_0^t \dfrac{1}{(k-2)!}[\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)^{k-1} f(\mathbf{x}^0) + \tau(\mathbf{v}\cdot\nabla)\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)^{k-1} f(\mathbf{x}^0) + o(|\tau|)](t-\tau)^{k-2}\,d\tau =$
$= f(\mathbf{x}^0) + (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla f(\mathbf{x}^0) + \ldots + \dfrac{1}{(k-2)!}\Big((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla)\Big)^{k-2} f(\mathbf{x}^0)+$
$+\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)^{k-1} f(\mathbf{x}^0)\dfrac{1}{(k-2)!}\displaystyle\int_0^t (t-\tau)^{k-2}\,d\tau + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)^{k-1} f(\mathbf{x}^0)\dfrac{1}{(k-2)!}\int_0^t \tau(t-\tau)^{k-2}\,d\tau+$
$\displaystyle\int_0^t o(|\tau|)(t-\tau)^{k-2}\,d\tau =$
$= f(\mathbf{x}^0) + (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla f(\mathbf{x}^0) + \ldots + \dfrac{1}{(k-2)!}\Big((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla)\Big)^{k-2} f(\mathbf{x}^0)+$
$+\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)^{k-1} f(\mathbf{x}^0)\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)^{k-1} f(\mathbf{x}^0)\dfrac{t^k}{k!} + \displaystyle\int_0^t o(|\tau|)(t-\tau)^{k-2}\,d\tau =$
$= f(\mathbf{x}^0) + (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla f(\mathbf{x}^0) + \ldots + \dfrac{1}{(k-2)!}\Big((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla)\Big)^{k-2} f(\mathbf{x}^0)+$
$+\dfrac{1}{(k-1)!}\Big((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla)\Big)^{k-1} f(\mathbf{x}^0) + \dfrac{1}{k!}\Big((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla)\Big)^{k} f(\mathbf{x}^0) + \displaystyle\int_0^t o(|\tau|)(t-\tau)^{k-2}\,d\tau$
Infine dato ε vi è δ per cui se $t = |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| \le \delta$ si ha $|o(\tau)| \le \varepsilon|\tau| \le \varepsilon t = \varepsilon|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|$. Pertanto per tali $\mathbf{x}$ l'ultimo integrale è minore di $\varepsilon t\frac{t^{k-1}}{k-1}$: ovvero è $o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k)$.

MULTINDICI

(Libro P. Acquistapace Vol. 1, cap. 4.8 pagg. 263-268)

Un vettore $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbf{N}^d$ a componenti intere non negative, si dice *d-multi-indice* La dimensione d si dice *lunghezza* del multi-indice.

Si dice *peso* o *norma* (è in effetti la norma l^1): $\quad |\mathbf{p}| = \sum_{i=1}^{d} p_i\,.$

Dati due multindici di egual lunghezza si scrive $\mathbf{q} \le \mathbf{p}$ per $q_1 \le p_1\,,\ \ldots, q_d \le p_d$.

Si definiscono: $\mathbf{p}! = p_1! \cdot \ldots \cdot p_d!\,,\quad \binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \binom{p_1}{q_1} \cdot \ldots \cdot \binom{p_d}{q_d},\quad \mathbf{p} \le \mathbf{q},$

e per d variabili $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ si pone $\mathbf{y}^{\mathbf{p}} =: y_1^{p_1} \cdot \ldots y_d^{p_d}$.

LEMMA:(Sviluppo multinomiale) Si considerino le variabili $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_d)$, per cui $A_i + A_j = A_j + A_i, A_iA_j = A_jA_i,\ A_i(A_j + A_k) = A_iA_j + A_iA_k$. Allora

$$\left(\sum_{i=1}^{d} A_i\right)^h = (A_1 + \ldots A_d)^h = \sum_{i=1}^{d} (A_1 + \ldots A_d)^{h-1} A_i = \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{h!}{\mathbf{p}!} A_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot A_d^{p_d} = h! \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{1}{\mathbf{p}!} \mathbf{A}^{\mathbf{p}}.$$

DIM. La moltiplicazione: $\quad \left(\sum_{i=1}^{d} A_i\right)^h = (A_1 + \ldots A_d) \cdot \ldots h \text{ fattori} \ldots \cdot (A_1 + \ldots A_d)$

per la proprietà *distributiva*, si calcola scegliendo un addendo A_{f_i}, $1 \le f_i \le d$ per ogni fattore, $1 \le i \le h$, ottenendo il prodotto $A_{f_1} \cdot A_{f_2} \cdot \ldots \cdot A_{f_h}$: per *commutatività* per qualche multindice di peso h e lunghezza d sarà $A_{f_1} \cdot A_{f_2} \cdot \ldots \cdot A_{f_h} = \mathbf{A}^{\mathbf{p}}$. Si sommano tali prodotti e si ottiene un poilinomio omogeneo $\sum_{|\mathbf{p}|=h} c_{\mathbf{p}} \mathbf{A}^{\mathbf{p}}$ di grado h. Si tratta, fissato il multindice $\mathbf{p}$ di lunghezza d e peso h, $p_1, \ldots, p_d$, $\sum p_1 = h$, di calcolare $c_{\mathbf{p}}$, cioè di contare quante diverse scelte $f_1, \ldots f_h$ danno $\mathbf{A}^{\mathbf{p}}$. Più *direttamente* si tratta di contare:

quante volte si sceglie: A_1 in p_1 fattori, A_2 in p_2 fattori , ... A_d in p_d fattori.

Tale numero "di volte" è appunto il coefficiente $c_{\mathbf{p}}$ di $\mathbf{A}^{\mathbf{p}}$ nello sviluppo di $\left(\sum_{i=1}^{d} A_i\right)^h$.

Nell'ordine dato delle variabili: per A_1 si hanno $\binom{h}{p_1}$ scelte di p_1 fattori, quindi per A_2 ne rimangono $\binom{h-p_1}{p_2}$, per A_3 $\binom{h-p_1-p_2}{p_3}$,..., per A_{d-1} $\binom{p_d+p_{d-1}}{p_{d-1}}$, per A_d rimane *una* scelta di p_d fattori. Ma $\binom{h}{p_1}\binom{h-p_1}{p_2}\binom{h-p_1-p_2}{p_3}\ldots\binom{p_d+p_{d-1}}{p_{d-1}} = \frac{h!}{p_1! \cdot \ldots \cdot p_d!} = \frac{h!}{\mathbf{p}!}$.

La relazione tra le derivate direzionali e i monomi è chiarita dalla seguenti convenzioni:

$$D^{\mathbf{p}} = D_1^{p_1} D_2^{p_2} \ldots D_d^{p_d} = \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}} =: \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_d^{p_d}}$$

quindi la relazione con le derivate e i multi-indici è messa in evidenza da:

COROLLARIO: Qualora si possa scambiare l'ordine di derivazione si ha:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)^h = \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + v_d \frac{\partial}{\partial x_d}\right)^h = h! \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{1}{\mathbf{p}!} \mathbf{v}^{\mathbf{p}} \frac{\partial^h}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}$$

DIM. Posto $A_i = v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ piuttosto che il prodotto tra numeri si considera come prodotto l'iterazione successiva di due derivazioni, e come somma la somma delle due derivazioni. Cioè si considerano le derivazioni come *operatori lineari* da funzioni a funzioni con il prodotto di composizione di operatori e la somma data dalla linearità degli operatori. Si osserva che per ipotesi le derivate commutano e per linearità si distribuiscono sulla somme. L'asserto segue dallo sviluppo multinomiale.

Equivalentemente $\dfrac{\partial^h f}{\partial \mathbf{v}^h}(x^0+t\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\cdot\nabla)^h f(x^0+t\mathbf{v}) = \quad h! \sum_{|\mathbf{p}|=h} \dfrac{1}{\mathbf{p}!}\ \dfrac{\partial^h f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(x^0+t\mathbf{v})\ \ \mathbf{v}^{\mathbf{p}} =$

$$= \ h! \sum_{p_1+\ldots+p_d=h} \frac{1}{p_1!\ldots p_d!}\ \frac{\partial^h f}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_d^{p_d}}(x^0+t\mathbf{v})\ \ v_1^{p_1}\ldots v_d^{p_d}.$$

IL TEOREMA DI TAYLOR PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

TEOREMA Sia $f:\Omega\to\mathbf{R}$, $\mathbf{x}^0\in\Omega$ aperto in $\mathbf{R}^d$, $f\in C^{k-1}(\Omega)$, e differenziabile k volte in $\mathbf{x}^0$ (le derivate parziali di ordine $k-1$ differenziabili in $\mathbf{x}^0$). Allora

a- esiste un *unico* polinomio $P_k(\mathbf{x})$ nelle variabili $x_1,\ldots x_d$, di grado k, per cui

$$\frac{|f(\mathbf{x})-P_k(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k}\to 0\ , \quad \text{per} \quad \mathbf{x}\to\mathbf{x}^0$$

ovvero
$$f(\mathbf{x}) = P_k(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k)\ , \quad \text{per} \quad \mathbf{x}\to\mathbf{x}^0.$$

b- Il polinomio $P_k(\mathbf{x})$ si dice *polinomio di Taylor di grado* k *e centro* $\mathbf{x}^0$. L'identità $f(\mathbf{x}) = P_k(\mathbf{x})+o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k)$ si dice *sviluppo di Taylor di ordine* k *e centro* $\mathbf{x}^0$, e la differenza $f(\mathbf{x})-P_k(\mathbf{x})$ *errore all'ordine* k nello sviluppo. Si ha

$$P_k(\mathbf{x}) \ = \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!}\ \frac{\partial^h f}{\partial(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^h}(x^0) \ = \ \sum_{h=0}^{k}\frac{1}{h!}\ \Big((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla\Big)^h f(x^0) \ =$$

$$= \sum_{h=0}^{k}\sum_{|\mathbf{p}|=h}\frac{1}{\mathbf{p}!}\ \frac{\partial^h f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(x^0)\ \ (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}} \ = \ \sum_{|\mathbf{p}|=0}^{k}\frac{1}{\mathbf{p}!}\ \frac{\partial^{|\mathbf{p}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(x^0)\ \ (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}} \ = \ \sum_{|\mathbf{p}|=0}^{k}\frac{1}{\mathbf{p}!}D^{\mathbf{p}}f(x^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}.$$

c- Se f è una funzione d i classe C^{k+1} in Ω allora il k-simo resto di Taylor di centro $\mathbf{x}^0$ per f può essere scritto nella forma

$$f(\mathbf{x})-P_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}|=k+1}\frac{1}{\mathbf{p}!}D^{\mathbf{p}}f(\mathbf{u})(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}},$$

ove $\mathbf{u}$ è un punto del segmento di estremi $\mathbf{x}^0$ e $\mathbf{x}$

DIM a- Unicità: siano $A(\mathbf{x})$, $B(\mathbf{x})$ due polinomi nelle variabili $x_1,\ldots x_d$ di grado k, con tale proprietà di approssimazione. La loro differenza soddisfa ancora tale proprietà.
Denotatala con $Q =: A-B = Q(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}|\le k} c_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}$, si ha cioè $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}\dfrac{Q(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|_m^k}=0.$
Si considera ora un arbitrario $\mathbf{v}$ di *norma unitaria* in $\mathbf{R}^d$.
Posto $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0+t\mathbf{v}$, si ha $Q(\mathbf{x}) = \sum_{h=0}^{k}\sum_{|\mathbf{p}|=h} c_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}} = \sum_{h=0}^{k} t^h \sum_{|\mathbf{p}|=h} c_{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{p}}$ Sia $g(t)=f(\mathbf{x}^0+t\mathbf{v})$.
Denotando con γ_h i coefficienti $\sum_{|\mathbf{p}|=h} c_{\mathbf{p}}\,\mathbf{v}^{\mathbf{p}}$, di t^h, si ha:

$$\lim_{t\to0}\frac{Q(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})}{t^k} = \lim_{t\to0}\frac{1}{t^k}\sum_{h=0}^{k}\gamma_h\,t^h = \sum_{h=0}^{k}\gamma_h\,t^{h-k} \ = \ 0$$

Ciò è possibile solo se $\gamma_0=\gamma_1=\cdots=\gamma_k=0$.

Pertanto per ogni $\mathbf{v}$, $|\mathbf{v}|=1$, e per ogni $0\le h\le k$ si ha $\sum_{|\mathbf{p}|=h} c_{\mathbf{p}}\,\mathbf{v}^{\mathbf{p}} = 0$

da cui, per positiva omogeneità, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, e per ogni h, si ha anche $\sum_{|\mathbf{p}|=h} c_{\mathbf{p}}\, \mathbf{x}^{\mathbf{p}} = 0$

Per ogni $h \in \{0, \dots, k\}$ per ogni $\mathbf{q}$ multindice di ordine h, calcolando la derivata $D^{\mathbf{q}} = \dfrac{\partial^h}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{q}}}$, nell'identità $\sum_{|\mathbf{p}|=h} c_{\mathbf{p}}\, \mathbf{x}^{\mathbf{p}} = 0$ si ottiene:

$$\mathbf{q}!\, c_{\mathbf{q}} = D^{\mathbf{q}} \sum_{|\mathbf{p}|=h} c_{\mathbf{p}}\, \mathbf{x}^{\mathbf{p}} = 0$$

cioè $c_{\mathbf{q}} = 0$ per $|\mathbf{q}| \le k$: ciò significa $Q(\mathbf{x}) \equiv 0$ ovvero $A \equiv B$.

b- Per il precedente teorema $\quad f(\mathbf{x}) = \sum_{h=0}^{k} \dfrac{1}{h!} \Big((\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \cdot \nabla\Big)^h f(x^0) \;+\; o(|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}|^k)$.

Poichè le derivate parziali di ordine $k-1$ sono differenziabili in $\mathbf{x}^0$, anche per le derivate parziali di ordine k in $\mathbf{x}^0$ è indifferente l'ordine di derivazione. Pertanto si ha

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}|=0}^{k} \frac{1}{\mathbf{p}!} D^{\mathbf{p}} f(x^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}} \;+\; o(|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}|^k).$$

c- È una dimostrazione indipendente dalle precedenti più semplice. Sia $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$, $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|}$, $t = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|$. Pertanto $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$. Sia $g(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$. Usando il resto di Lagrange per gli sviluppi di Taylor di funzioni di una variabile reale si ha che vi 'e τ tra 0 e t per cui:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) = g(t) = g(0) + g'(0)t + \dots \frac{1}{k!} g^{(k)}(0)t^k + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\tau)t^{k+1} =$$
$$= f(\mathbf{x}^0) + \dots + \frac{1}{k!} \Big((\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \cdot \nabla)\Big)^k f(\mathbf{x}^0) + \frac{1}{(k+1)!} \Big((\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \cdot \nabla)\Big)^{k+1} f(\mathbf{x}^0 + \tau\mathbf{v})$$

Per i teoremi di Schwarz e multinomiale si ha

$$\Big((\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \cdot \nabla)\Big)^{k+1} f(\mathbf{x}^0 + \tau\mathbf{v}) \;=\; (k+1)! \sum_{|\mathbf{p}|=k+1} \frac{1}{\mathbf{p}!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0 + \tau\mathbf{v}) \;\; (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}$$

OSSERVAZIONE

- Come osservato inizialmente riguardo alle derivate direzionali seconde:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}^0) = \langle \mathbf{v} \cdot Hf(\mathbf{x}^0)\mathbf{v} \rangle \;=\; {}^t\mathbf{v} \cdot Hf(\mathbf{x}^0)\mathbf{v}.$$

pertanto i polinomi di Taylor del secondo ordine si scrivono in modo ancor più aderente a quelli di funzioni di una variabile:

$$P_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) \;+\; (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}^0) \;+\; \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \cdot Hf(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \;=$$
$$f(\mathbf{x}^0) \;+\; (x_1 - x_1^0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) + \dots + (x_d - x_d^0)\frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{x}^0) \;+$$
$$+\; \frac{1}{2}\left((x_1 - x_1^0)^2 \frac{\partial f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^0) + \dots (x_d - x_d^0)^2 \frac{\partial f}{\partial x_d^2}(\mathbf{x}^0)\right) + \sum_{i=1}^{d} \sum_{i<j}^{d} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^0)$$

- L'unicità del polinomio di Taylor è tra l'altro utile nella pratica per ricavare polinomi di Taylor di funzioni di più variabili, da quelli di funzioni di una variabile, dalle quali sono ottenute le prime per composizione.

- Dal polinomio di Taylor di centro $\mathbf{x}^0$ e grado k, altrimenti calcolato, si possono quindi ottenere, per $|\mathbf{p}| \le k$, le derivate parziali $\dfrac{\partial^h f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0)$ moltiplicando per $\mathbf{p}!$ il coefficiente del monomio $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}$.