Analisi Matematica II, Anno Accademico 2015-2016.

Ingegneria Cvile Ambientale Edile

FOGLIO DI ESERCIZI 10, dal 3 al 18 Dicembre 2015
Calcolo Differenziale 4: massimi e minimi.

Altri esercizi ed esempi sull'argomento si trovano in diversi testi e in particolare nel sito del corso (http://elearn.ing.unipi.it/course/view.php?id=565):
nelle prove di esame svolte e nel volume di P.Acquistapace: Analisi 1 Cap. 4.11 pag.288-9; Analisi 2 Cap 1.10, pagg. 85-88.

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.

ESERCIZIO n.1 Usando metodi diretti (diseguaglianza di Cauchy-Schwartz) calcolare il valore minimo di $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ per $xyzw = 1$. Calcolarne poi l'estremo superiore.

ESERCIZIO n. 2 (A1 es.4.11-6) a- Con metodo diretto e argomento sintetico determinare il triangolo inscritto in un cerchio che ha area massima.
b- Usando il calcolo differenziale con metodo indiretto risolvere lo stesso problema (Si tenga presente il significato geometrico del determinante, e si usino le coordinate polari dal centro del cerchio).

ESERCIZIO n.3 (A1 es.4.11-1) Dato un foglio rettangolare di cartone, ritagliare dai vertici 4 quadrati eguali in modo da costruire una scatola parallelepipeda di volume massimo.

ESERCIZIO n.4 (A1 es.4.11-2) Determinare fra tutti i coni circolari circoscritti ad una sfera, quello di supercie laterale minima (ci si riduca oppotunamente ad un problema nel piano).

ESERCIZIO n. 5 a- Mostrare che la funzione $f(x,y) = x^4+y^2-3x+2y$ assume valore minimo su $\mathbf{R}^2$. Che dire del valore di massimo?

b- Mostrare che la funzione $f(x,y) = x^4 + y^2 - 3x + 2y - \log(x^2 + y^2 - 1)$ assume valore minimo sul suo dominio di definizione. Che dire del valore di massimo?

c- Mostrare che la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + 2y - \log xy$ assume valore minimo sul suo dominio di definizione. Che dire del valore di massimo?

ESERCIZIO n. 6 Determinare i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni: $x^3+(x-y)^2$, $x^4 + (x - y)^2$, $xy + y^2 - 3x$, $\sin(x + y)$, $x^2 - \sin y$, $x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

ESERCIZIO n. 7 Si dica se $(0,0)$ è di massimo, di minimo, o di sella per ciascuna delle seguenti funzioni: $x^4 + y^4$, $x^4 - y^4$, $1 - x^4 - x^2y^2 - y^4$.

ESERCIZIO n.8 Si determinino se esistono il valore massimo $\mathbf{V_M}$ e il valore minimo $\mathbf{V_m}$ per la funzione $\dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$.

ESERCIZIO n. 9 Determinare se esistono minimo e massimo delle seguenti funzioni nei rispettivi insiemi:

xy su $\{x^2+y^2 \leq 1\}$

$x^2+y^2-(x+y)$ su $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

$\frac{x^2y}{x^2+4y^2}+x$ per $xy>0$ $xy+x$ per $xy \leq 0$ su $\{0 \leq y \leq 1, y^2-1 \leq x \leq 1\}$

ESERCIZIO n.10 Determinare nel caso esistano i valori di massimo e minimo assoluti in $\mathbf{R}^2$ della funzione $f(x,y)=(3x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$.

ESERCIZIO n. 11 Sia $f(x,y)=2x^4-x^2e^y+e^{4y}$. Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di tale funzione e se ne calcoli il limite per $x^2+y^2 \to +\infty$. Si osservi che vi sono solo due punti di minimo assoluto e nessun altro punto critico. Si traccino approssimativamente le linee di livello $f=c$, al variare di c in $\mathbf{R}$, mettendo in risalto quali sono connesse, quali sono limitate.

ESERCIZIO n.12 (Secondo appello, prima parte, gruppo 1, es. 3, 2 Luglio 2015) Posto $f(x,y,z)=x^4+y^3$, determinare i punti di massimo e minimo assoluto di f nell'insieme $E=\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \max\{|x|,|y|\}=1\}$, specificando quali di essi siano punti critici tangenziali (cioè stazionari vincolati).

ESERCIZIO n.13 (Appello straordinaro, es. 1(iii), 16 Novembre 2015) Si consideri la funzione
$f(x,y)=\dfrac{(x-y)^2}{2}-\dfrac{(x+y)^3}{3}$, $(x,y) \in D$
ove $D=\{(x,y):\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq xy \leq 1\}$

Si calcolino i valori di massimo e di minimo di f su D.

ESERCIZIO n.14 (Terzo appello, prima parte, es. 4, 20 Luglio 2015) Si classifichino i punti critici della funzione $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+xyz$.

ESERCIZIO n.15 (Quarto appello, prima parte, es. 4, 11 Settembre 2015) Dati $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+4y}$ e $D=\{(x,y):\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq xy \leq 1\}$ si determinino se esistono: i punti P_M di massimo relativo e P_m di minimo relativo all'interno di D, i punti F_M di massimo relativo ed F_m di minimo relativo vincolati sulla frontiera di D.

ESERCIZIO n.16 (Test di autovalutazione, prima parte es. 8, dicembre 2014)Si determinino i valori $\mathbf{V_M}$ di massimo, $\mathbf{V_m}$ di minimo, per $f(x,y,z)=x^2-yz$ sulla palla unitaria definita da $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

ESERCIZIO n.17 Si determinino se esistono il valore massimo e il valore minimo per la funzione $x^2-2y^2+3z^2$ sul vincolo definito da $xy=1,\ yz+xz=1$.

ESERCIZIO n.18 Studiare il tipo dei punti tangenziali della funzione $f(x,y)=2x^2+2y^4-x-y^2$ su $x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$.

ESERCIZIO n.19 (Primo appello, prima parte es. 5, 11 Giugno 2015) Si determinino se esistono il valore massimo $\mathbf{V_M}$ e il valore minimo $\mathbf{V_m}$ per la funzione $f(x,y,z) = xz - zy$ sul vincolo dato dall'equazione $xy + x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

ESERCIZIO n.20 (Prima prova in itinere, seconda parte es. 2, 26 Febbraio 2015)
(a) Si calcoli il valore massimo $\mathbf{M}$ ed il valore minimo $\mathbf{m}$ della funzione $f(x,y,z) = x^2 - yz$ nell'insieme E descritto dalla relazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

(b) Si calcolino tutti i punti critici tangenziali per la funzione f nell'insieme E' descritto da $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, e si determini la loro natura.

ESERCIZIO n. 21 Trovare i punti di massimo o di minimo relativo e calcolare i valori di massimo relativo e minimo relativo, delle seguenti funzioni sui domini rispettivi:

$f(x,y) = \frac{x^4+2x^3y}{x^4+y^4}$, $y - x^2 = 0$; $f(x,y) = \sin((x-2)^2 + y^2)$, $(1-x)^3 + y^2 = 0$;

$f(x,y) = x^2 + 6xy + 3y^2$, $x^2 + y^2 - 2xy = \frac{1}{(x+y-2)^2}$;

$f(x,y,z) = e^{-(x^2-y+z^2)}$, $\frac{x^2}{4} + y^2 + 3z^2 \leq 1$;

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \ , \quad \begin{cases} (z+1)^2 - y^2 - (x+3)^2 = 0 \\ z^2 + y^2 - (x+1)^2 = 0 \\ z > -3 \end{cases} \quad ;$$

- $$f(x,y,z) = (x+1)^2 + (y-\varepsilon)^2 + z \ , \quad \begin{cases} (1-x)z = (1+x)y \\ z^2 + y^2 - (x+1)^2 = 0 \\ z > -3 \end{cases} \quad ;$$

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, tetraedro di vertici $(-1,-1,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(0,1,-1)$, $(0,0,1)$;

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, $\max\{|x+2|, |y+3|, |z+4|\} = 1$;

$$f(x,y,z,w) = 4x^2 + 2(z-w)^2 \quad \begin{cases} (x+y+z+w)^2 + (x-y+z-w)^2 = 1 \\ (x-y-z+w)^2 + (x-y-z-w)^2 = 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO n. 22 Sia data un insieme di coppie $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$. Determinare a e b in modo tale che la funzione:
$\chi^2(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2$ sia minima. Il minimo è assoluto o relativo?

ESERCIZIO n. 23 Provare che l'insieme $D = \left\{ (x,y,z) \ : \ \frac{\sqrt{x^2+\frac{y}{2}^2}-3}{4} + z^2 = 1 \right\}$ è chiuso e limitato. Determinare poi la massima e la minima distanza dei punti di D dall'origine.

ESERCIZIO n. 24 a- Trovare il massimo volume di un parallelepipedo rettangolo inscritto nell'ellissoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.
b- Trovare l'ellissoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ di volume ($\frac{4}{3}\pi abc$) massimo per cui $a + b + c = M,\ a,\ b,\ c > 0$.
c- Trovare la minima distanza tra gli insiemi $\{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{yz = xz\}$ e $\{z - y = 0\} \cap \{x + y + z = 1\}$.

ESERCIZIO n.25 Sia $\mathbf{O}$ l'insieme delle matrici $n \times n$ ortogonali (${}^tMM = Id$), e sia $f : \mathbf{O} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \mathrm{tr}\ A$. Si dimostri che esistono unici e si calcolino i punti di massimo e minimo di f.

ESERCIZIO n.26 Dato un vettore $x = (x_1, \dots x_n)$, tale che $x_i > 0$ per ogni i e $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, si definisce $H(x) = -\sum_{i=1}^n x_i \log x_i$. Determinare il vettore che massimizza H.

• ESERCIZIO n. 27È vero che il minimo valore di $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2$ su $(x - R)^2 + (y - R)^2 = 2R^2$ è sempre 0? Giustificare la risposta.

• ESERCIZIO n.28 (Test di autovalutazione, seconda parte es. 3, dicembre 2014)
a) Avendo a disposizione $16cm^2$ di materiale, e volendolo utilizzare tutto per costruire una scatola a forma di parallelepipedo, si vogliono rinforzare i bordi con un nastro. Qual'è la lunghezza minima, in cm, di nastro che necessita?

b) Cosa dire della lunghezza massima?

c) Avendo anche a disposizione 20 cm di nastro, e volendo utilizzare tutto il materiale, qual'è il volume massimo che si può ottenere?

NOTA - Un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ è detto *convesso* se contiene interamente i segmenti delimitati dai suoi punti: se $x \in C$, $y \in C$ e $\lambda \in [0; 1]$ allora $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.
- Una funzione $f : C \to \mathbf{R}$, $C \subseteq \mathbf{R}^d$, si dice *convessa* se C è convesso e se $\lambda \in [0; 1]$ allora $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.
(Ciò vuol dire che le corde tra due punti del grafico di f son sopra al grafico di f ristretta al segmento che è proiezione ortogonale della corda in questione sul dominio C).
Ciò è equivalente a chiedere che il sopragrafico di f : $\{(x, y) \in C \times \mathbf{R} :\ f(x) \leq y\ \}$ sia convesso.
- La funzione si dirà *strettamente convessa* se inoltre per $0 < \lambda < 1$ vale $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. (Ovvero il grafico di f non contiene segmenti).

ESERCIZIO n. 29 a- Sia Ω un aperto convesso di $\mathbf{R}^d$, e sia $f : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile. Dimostrare che f è convessa se e solo se, per ogni $x, y \in \Omega$: $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq 0$ dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rappresenta il prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$.
b- Nelle stesse ipotesi si deduca che f è convessa se e solo se il suo grafico sta sopra ogni piano tangente ad esso.
c- Se poi f è C^2 si provi che f è convessa se e solo se la matrice Hessiana $Hf(x)$è semidefinita non negativa in ogni punto $x \in \Omega$.

ESERCIZIO n. 30 a- Sia $f : \Omega \subset \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente convessa, ove Ω è un aperto convesso. Si dimostri che f ha al più un punto estremale interno a Ω.
b- Una funzione continua convessa a valori reali, definita su $C = \bar{\Omega}$, con Ω aperto convesso limitato, assume valore massimo su $\partial\Omega$.
• c- Una funzione continua convessa a valori reali, definita su $C = \bar{\Omega}$, con Ω aperto convesso limitato, assume valore massimo solo su $\partial\Omega$ a meno che non sia costante.

ESERCIZIO n. 31 a- Se $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$ e $\triangle u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} > 0$ allora u non ha punti di massimo locale.

• - Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, Ω aperto limitato, se $\triangle u \geq 0$ allora $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.
(Si consideri x_0 di massimo su $\bar{\Omega}$ di u e $v(x) = u(x) + \varepsilon|x - x_0|^2$. Si applichi il precedente punto a v.)

- Si deduca che se $\triangle u \geq 0$ allora u non ha punti di massimo locale stretto.

• b- Si provi che se Ω é un aperto limitato, $f \in C(\mathbf{R}^n)$, $g \in C(\mathbf{R}^n)$ allora vi é *al piú una* funzione u definita su $\overline{\Omega}$ che risolve:

$$\begin{cases} \triangle u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \end{cases}$$

- Si provi che per questa eventuale soluzione si ha:

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + \frac{(\mathrm{diam}\Omega)^2}{2n} \max_{\overline{\Omega}} |f|.$$

NOTA: Si può provare inoltre:
- se Ω è un *connesso* aperto (due suoi punti posson esser sempre congiunti da un cammino continuo sempre contenuto nell'aperto), $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\triangle u \geq 0$, allora se u assume massimo in $\overline{\Omega}$ allora lo assume **solo** sul bordo $\partial\Omega$ oppure u é costante.
- se Ω è un connesso aperto, $u \in C^2(\Omega)$, $\triangle u = 0$, allora u non assume ne massimi ne minimi locali interni in Ω a meno che non sia costante.

ESERCIZIO n. 32 Utilizzando quanto dimostrato nel precedente esercizio si trovino tutte le soluzioni delle equazioni:

$$\begin{cases} \triangle u(x,y) = 0 & x^2+y^2 < 1 \\ u(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2 & x^2+y^2 = 1 \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \Omega = \{x^2+y^2 < 1\} \end{cases}$$

• $$\begin{cases} \triangle u(x,y) = 0 & \max\{|x|,|y|\} < \pi \\ u(x,y) = \sin x \cos y & \max\{|x|,|y|\} = \pi \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \Omega = \{\max\{|x|,|y|\} < \pi\} \end{cases}$$