Funzioni convesse

cinque minuti di funzioni convesse

(cfr. per una versione più analitica con altre proprietà e dimostrazioni, dettilo scritto 2014.)

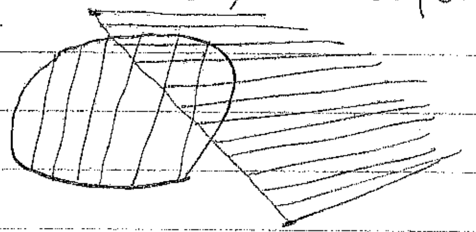
- un sottoinsieme C di uno spazio vettoriale si dice convesso

analiticamente in forma parametrica:

$p \in C,\ q \in C \Longrightarrow \forall t \in [0;1]\ \ tq + (1-t)p = p + t(q-p) \in C$

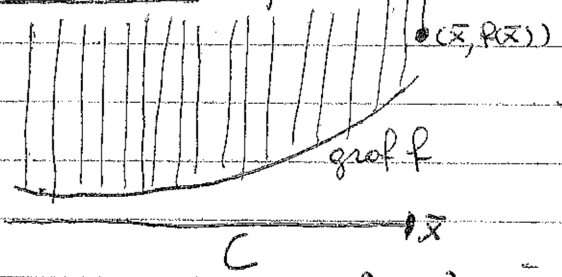
in $\mathbb{R}^N$ $p = (p_1, \dots, p_N) \in C$, $q = (q_1, \dots, q_N) \in C \Rightarrow \forall t \in [0;1]\ \ (p_1 + t(q_1 - p_1), \dots, p_N + t(q_N - p_N)) \in C$

- Intersezione di una famiglia di convessi è convesso



- I convessi di $\mathbb{R}$ son tutti e soli gli intervalli (rette, semirette, segmenti)

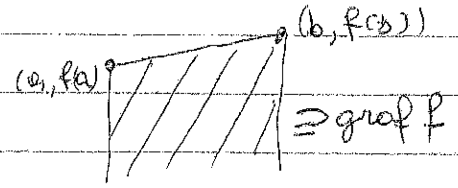
- $\boxed{C \text{ convesso}}$: $f : C \to \mathbb{R}$ si dice <u>convessa</u> se



è convesso, cioè

$\{(x,y) : x \in C,\ y \geq f(x)\}$ è convesso.

- $f : C \to \mathbb{R}$ è convessa $\Longleftrightarrow$ ogni corda con estremi sul grafico sta sopra il grafico



cioè $\forall t \in [0;1]\ \forall a \in C\ \forall b \in C$

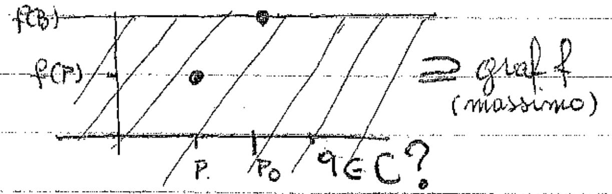
$f(ta + (1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$

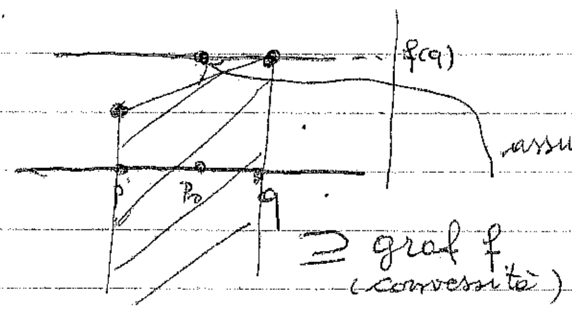
- f derivabile di una variabile: f CONVESSA $\Longleftrightarrow$ il grafico di f sta sopra le rette tangenti $\Longleftrightarrow$ $f'(x)$ è crescente

f due volte derivabile " : f CONVESSA $\Longleftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$

a) $f: C \to \mathbb{R}$ convessa <u>non costante</u>, se p_0 è di massimo assoluto allora $p_0 \in$ frontiera relativa di C (frontiera di C come sottoinsieme del più piccolo sottospazio affine che lo contiene)

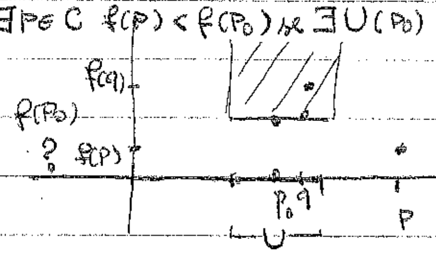
$\exists p \in C : f(p) < f(p_0)$

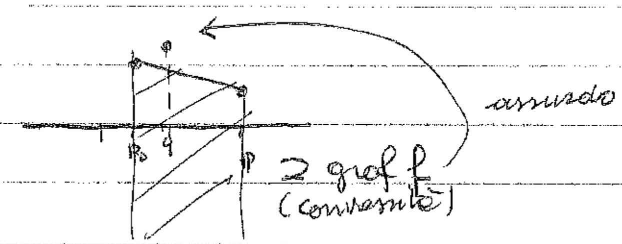




b) $f: C \to \mathbb{R}$ convessa p_0 minimo relativo $\Rightarrow$ p_0 minimo assoluto

? $\exists p \in C$ $f(p) < f(p_0)$ se $\exists U(p_0)$ $q \in U \Rightarrow f(q) \geq f(p_0)$?





$V: D \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ si dice monotono $\forall x, z \in D$ $\langle (V(z) - V(x)) \cdot (z - x) \rangle_{\mathbb{R}^N} \geq 0$

f differenziabile, $f: C \to \mathbb{R}$

f convessa $\Longleftrightarrow$ il grafico sta sopra tutti i piani ad esso tangenti

$$\forall x, z \in C \quad \boxed{f(z) \geq (z - x) \cdot \nabla f(x) + f(x)}$$

$\Longleftrightarrow$ $V(x) = \nabla f(x)$ è un campo di vettori monotono crescente

$$\forall x, z \in C \quad \boxed{\langle (\nabla f(z) - \nabla f(x)) \cdot (z - x) \rangle_{\mathbb{R}^N} \geq 0}$$

f due volte differenziabile, $f: C \to \mathbb{R}$

f convessa $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in C$ $\boxed{Hf(x) \geq 0}$ (la forma quadratica definita dalla matrice delle derivate parziali seconde è semidefinita positiva)