<u>Osservazione</u>. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange permette <u>di evitare</u> l'uso, nell'applicazione concreta, del teorema delle funzioni implicite del Dini, usando <u>direttamente</u> i gradienti delle funzioni $g_1, \ldots, g_{N-K}$ che definiscono il vincolo (e per ipotesi sono una base dello spazio normale alla giacitura del tangente al vincolo) per interpretare la condizione geometrica $\nabla f(x^0) \perp \mathrm{Tan}_{x^0} F$ in x^0.

- Nelle ipotesi sulle $g_1, \ldots, g_{N-K}$ si può grazie al teorema del Dini interpretare $\nabla f(x^0) \perp \mathrm{Tan}_{x^0} F$ in x^0, con i gradienti delle funzioni implicite definite da $g = h^0$.

Infatti in un intorno V di x^0 $F \cap V$ è grafico di una funzione di K variabili in $\mathbb{R}^{N-K}$. Per comodità si supponga le prime K: $\left(\det\left(\frac{\partial g}{\partial x_{K+1}} \cdots \frac{\partial g}{\partial x_N}\right) \neq 0\right)$

Richiamando la dimostrazione di B.1.1 a pagina 6:

l'omeomorfismo con differenziale di rango massimo è del tipo

$\varphi(\alpha) = (\alpha; h(\alpha))$ $\quad (\alpha^0, h(\alpha^0)) = x^0 \quad \frac{\partial h}{\partial \alpha_i} = -\left(\frac{\partial g}{\partial x_{K+1}} \cdots \frac{\partial g}{\partial x_N}\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial \alpha_i}$

- - Quindi

se x^0 è estremale relativo di f su F allora (e solo allora)

α^0 è estremale relativo di $f(\alpha, h(\alpha))$ per α in un aperto di $\mathbb{R}^K$

Usando A.1 e la regola della catena $\left(\nabla\varphi = [I_{d_K} | \nabla h(\alpha)]\right)$

$$0 = \nabla_\alpha (f(\alpha, h(\alpha)))\Big|_{\alpha^0} = \left[I_{d_{K\times K}} | \nabla h(\alpha^0)\right] \nabla_x f(x^0)$$

e $\nabla_\alpha h(\alpha^0) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x^0) \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_K}(x^0) \end{pmatrix} \cdot {}^t\!\left(\frac{\partial g}{\partial x_{K+1}}(x^0) \cdots \frac{\partial g}{\partial x_N}(x^0)\right)^{-1}$ che può essere calcolata. In modo compatto $\nabla_\alpha h = -\left(\nabla_{x_1 \ldots x_K} g\right) \cdot \left(\nabla_{x_{K+1} \ldots x_N} g\right)^{-1}$

Quindi andrebbero trovati gli x^0 per cui

$$\left[I_{d_K} \Big| -\nabla_{1 \ldots K}\, g \left(\nabla_{K+1 \ldots N}\, g(x)\right)^{-1}\right] \cdot \nabla f(x) = 0$$

Di solito è più agevole usare i moltiplicatori al primo ordine.

Osservazione. Analoga all'osservazione a pagina 7 bis riguardo l'approccio indiretto con il teorema del Dini piuttosto che con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Nel caso della condizione necessaria, B.2 pagina 9, al secondo ordine, può essere nella pratica più conveniente usare il teorema del Dini o meglio usare sia il metodo dei moltiplicatori di Lagrange che il teorema del Dini. Ciò è ancor più utile nel caso della controparte sufficiente di B.2; condizione B' pagina 17. Cioè si tratta di evitare il calcolo della matrice di proiezione su $T_{x^0}F$, usando le funzioni implicite.

- Riferendosi alla dimostrazione di B.2 pagina 9:

l'omeomorfismo C^2 con differenziale di rango massimo $\psi: A = \mathring{A} \subseteq \mathbb{R}^K \to V \cap F$ può essere considerato del tipo "grafico di funzione", per il teorema del Dini: per comodità si assume $\det\left(\frac{\partial g}{\partial x_{K+1}} \cdots \frac{\partial g}{\partial x_N}\right) \neq 0$ su $V \cap F$ e pertanto

$\psi(\alpha) = (\alpha; h(\alpha))$, $(\alpha^0, h(\alpha^0)) = x^0$, $\qquad \nabla h(\alpha) = -\left(\nabla_{x_1 \cdots x_K} g(\psi(\alpha))\right)\left(\nabla_{x_{K+1} \cdots x_N} g(\psi(\alpha))\right)^{-1}$ ⊛

$(\alpha \in A = \mathring{A} \subseteq \mathbb{R}^K,\ h \in V \cap F \subseteq \mathbb{R}^{N-K})$

•• Derivando due volte $f(\psi(\alpha))$ si ottiene, prima di operare la sostituzione al quartultimo rigo di pagina 9.

$$H(f \circ \psi)(\alpha) = \nabla \psi(\alpha)\, Hf(\psi(\alpha))\, D\psi(\alpha) + H\psi(\alpha) \cdot \nabla f(\psi(\alpha))$$

poiché $\nabla_K \psi(\alpha) = [Id_K \ \nabla h(\alpha)]$; $D_\alpha \psi(\alpha) = \begin{bmatrix} Id_K \\ Dh(\alpha) \end{bmatrix}$; $H\psi_i = [0]$ $\ 1 \leq i \leq K$ $(\psi_i(\alpha) = \alpha_i)$

$H\psi_i = H h_{i-K}$ $\ K+1 \leq i \leq N$ $\ (\psi_i(\alpha) = h_{i-K}(\alpha))$, e le derivate seconde di h possono essere ricavate o derivando ⊛ o in modo equivalente derivando due volte $g(\alpha, h(\alpha)) = h^0$,

avendo un punto critico x^0 di f su F, α^0 sarà critico per $f \circ \psi$ la condizione necessaria per essere minimo relativo letta con le funzioni implicite sarà che

$$[I_K \ \nabla h(\alpha^0)]\, Hf(x^0) \begin{bmatrix} I_K \\ Dh(\alpha^0) \end{bmatrix} + H\psi(\alpha^0) \cdot \nabla f(x^0) \geq 0$$

∴ L'uso misto delle due tecniche può essere pure proficuo ancora grazie a ⊛:

① SI TROVA UN PUNTO CRITICO x^0 CON IL SUO MOLTIPLICATORE λ^0;

② $[I_K \ \nabla h(\alpha^0)]\, [Hf(x^0) - H(g(x^0) \cdot \lambda^0)] \begin{bmatrix} I_K \\ Dh(\alpha^0) \end{bmatrix} \geq 0$ fermandosi alla penultima riga di pagina 9.

<u>Osservazione</u>. come osservato a pagina 7bis, nelle pratica può essere comodo <u>piuttosto che calcolare</u> Π <u>la matrice di proiezione sul piano tangente</u> in x^0 ad F (essendo x^0 un punto critico di f lungo F) usare il teorema del Dini.

- Per comodità $\det\left(\frac{\partial g}{\partial x_{k+1}} \dots \frac{\partial g}{\partial x_N}\right) \neq 0$ su $V \cap F$, $\psi(\alpha) = (\alpha, h(\alpha))$
  $x^0 = (\alpha^0, h(\alpha^0))$, $V \cap F$ = grafico di h, $h : A = \mathring{A} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{N-k}$ C^2.
  $$\nabla h(\alpha) = -\left(\nabla_{x_1 \dots x_k} g(\psi(\alpha))\right)\left(\nabla_{x_{k+1} \dots x_N} g(\psi(\alpha))\right)^{-1}$$

•• Solo con il teorema del Dini

$$\begin{bmatrix} I_k & \nabla h(\alpha^0) \end{bmatrix} \cdot \nabla f(x^0) = 0 \quad x^0 \text{ critico per } f \text{ lungo } F$$

$$\begin{bmatrix} I_k & \nabla h(\alpha^0) \end{bmatrix} Hf(x^0) \begin{bmatrix} I_k \\ Dh(\alpha^0) \end{bmatrix} + H\psi(\alpha^0) \nabla f(x^0) \underset{\neq}{>} 0 \implies x^0 \text{ minimo relativo di } f \text{ su } F$$

∴ metodo misto

$$\nabla f(x^0) = \nabla(g(x^0) \cdot \lambda^0) \quad x^0 \text{ critico per } f \text{ lungo } F$$

$$\begin{bmatrix} I_k & \nabla h(\alpha^0) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} Hf(x^0) - Hg(x^0) \cdot \lambda^0 \end{bmatrix}}_{H_{x^0}} \begin{bmatrix} I_k \\ Dh(\alpha^0) \end{bmatrix} \underset{\neq}{>} 0 \implies x^0 \text{ minimo relativo di } f \text{ su } F$$

<u>Osservazione</u> • $a, b \in \mathbb{R}^N$ $a \otimes b(x) =: a \cdot \langle b \cdot x \rangle_{\mathbb{R}^N}$, matrice associata $(a_i b_j)$ i-riga j-colonna

• Calcolo della matrice di proiezione ortogonale $N \times N$, su un k-sottospazio T di $\mathbb{R}^N$

① ! SI TROVA UNA BASE ORTONORMALE DI T: $U^1, \dots U^k$, $\Pi_T(x) = \sum_{\ell=1}^{k} (x \cdot U^\ell) U^\ell$, $M_i^j = \sum_{\ell=1}^{k} U_i^\ell U_j^\ell$

•• $F = \{x : g(x) = h^0\}$ $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-k}$ Dg di rango massimo;
$\tilde{V}^m = \nabla g_m(x^0) \cdot |\nabla g_m(x^0)|^{-1}$, ! <u>si ortonormalizza</u> $\tilde{V}^m$ con V^m, $\Pi_{Tan_{x^0} F}\, x = \left(I_d - \sum_{m=1}^{N-k} V_i^m V_j^m\right) x$

••• $F = \operatorname{Im}\psi$ $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ omeomorfismo tra $A = \mathring{A} \subseteq \mathbb{R}^k$ e $V \cap F$ V intorno di $x^0 \in F$ $\psi(\alpha^0) = x^0$, $D\psi$ rango mass.
$\tilde{U}^\ell = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_\ell}(\alpha^0) \cdot \left|\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_\ell}(\alpha^0)\right|^{-1}$, ! si ortonormalizza $\tilde{U}^\ell$ con U^ℓ, $\Pi_{Tan_{x^0} F}\, x = \left(\sum_{\ell=1}^{k} V_i^\ell V_j^\ell\right) x$