Foglio 10 esercizio 19

- Trovare se esistono i valori di massimo e minimo assoluti di $f(x,y,z) = xz - yz$ sull'insieme definito da $x^2+y^2+z^2+xy=1$
- Discutere la natura di altri eventuali punti stazionari tangenziali

i) $g(x,y,z) = xy + x^2+y^2+z^2$ $\quad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+2x \\ x+2y \\ 2z \end{pmatrix}$ se $\begin{matrix} y=-2x \\ x=-2y \\ z=0 \end{matrix}$ e $g(x,y,z)=1$

si ha $y=-2x=4y \Rightarrow y=0, z=0, x=0$ $\quad g(0,0,0)=0$. Quindi sul vincolo sono soddisfatte le ipotesi del teorema del Dini

Il vincolo è chiuso essendo livello di una funzione continua; è anche limitato poiché $g(x,y,z) = (\alpha x+\beta y)^2 + (1-\alpha^2)x^2 + (1-\beta^2)y^2 + z^2$ $\quad 0<\alpha,\beta<1$, $2\alpha\beta = 1$.

ovvero $g(x,y,z)=1$ è un ellissoide $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$

Quindi $\exists \max\limits_{g=1} f \quad \exists \min\limits_{g=1} f$

ii) Essendo sia f che g forme quadratiche

$f(x,y,z) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad g(x,y,z) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, il sistema di Lagrange è

$$\begin{cases} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ xy + x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

poiché $\begin{pmatrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{pmatrix}$ non soddisfa l'equazione di vincolo i moltiplicatori ammissibili devono soddisfare $\det\begin{pmatrix} -2\lambda & -\lambda & 1 \\ -\lambda & -2\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2\lambda \end{pmatrix} = 6\lambda(\lambda^2-1) = 0$

iii) Per 2-positiva omogeneità di f e di g se $\overline{x}$ è un punto critico tangenziale

$f(\overline{x}) = \frac{1}{2}\overline{x}\cdot\nabla f(\overline{x}) = \frac{1}{2}\overline{x}\cdot\nabla g(\overline{x})\cdot\lambda = g(\overline{x})\cdot\lambda = \lambda$

Quindi i valori candidati sono $\lambda=1$, $\lambda=-1$, $\lambda=0$: bisogna verificare che questi corrispondono a qualche punto sul vincolo.

iv) Si osserva che $\lambda=0$ darebbe come valore di f sul vincolo 0

ma $f(0,\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}) = -\frac{1}{2}$ $\quad g(0,\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}) = 1$ $\quad f(0,-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}) = \frac{1}{2}$ $\quad g(0,-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}) = 1$

Quindi 0 non può essere né valore di massimo né di minimo.

Necessariamente da i) segue che $\lambda=1$, $\lambda=-1$ corrispondono a punti critici sul vincolo per cui $f=1$, $f=-1$ che sono rispettivamente il valore di massimo e il valore di minimo di f sul vincolo.

•• Rimane da vedere se a $\lambda=0$ corrisponde effettivamente un punto critico tangenziale sul vincolo (di valore critico 0) e capire se è un punto critico di massimo relativo, minimo relativo o sella.
Per $\lambda=0$ il sistema di Lagrange diventa

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ xy+x^2+y^2+z^2=1\end{cases} \iff \begin{cases}z=0\\-z=0\\x-y=0\\xy+x^2+y^2+z^2=1\end{cases} \iff \begin{cases}x=y\\z=0\\xy+x^2+y^2+z^2=1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=y\\z=0\\3x^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{\sqrt3}\\z=0\\x=\frac{1}{\sqrt3}\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}y=-\frac{1}{\sqrt3}\\z=0\\x=-\frac{1}{\sqrt3}\end{cases}$$ Si discute $(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},0)$ essendo l'altro analogo.

i. La lagrangiana per l'autovalore 0 è $\mathcal{L}_0(x,y,z)=f(x,y,z)=z(x-y)$ quindi il suo Hessiano è $H=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ che ha polinomio caratteristico $\lambda(2-\lambda^2)$ con autovalore 0 e relativo autospazio $\substack{z=0\\x=y}$ i.e. $t(1,1,0)$ $t\in\mathbb{R}$.
Poiché il piano tangente in $(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},0)$ a $xy+x^2+y^2+z^2=1$ è ortogonale a $\nabla g(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},0)=(\sqrt3,\sqrt3,0)$, il vettore $(1,1,0)$ sta nella giacitura del tangente. Quindi la forma quadratica associata ad H non è strettamente definita sulla giacitura del tangente. Non si possono applicare i criteri sufficienti:

ii. Quindi anche con il teorema del Dini sarebbe necessario avere derivate terze della funzione implicita per valutare $f(x(y,z),y,z)$ ...
Conviene forse procedere artigianalmente (pur con un'idea generale sottostante): si va in direzione opposta a quella del teorema del Dini: ovvero si cerca di esprimere il luogo di zeri $\{g=1\}$ come unione di grafici in (x,y) anche se $\frac{\partial g}{\partial z}(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},0)=0$ essendo $(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$ sulla frontiera del dominio delle $z=z(x,y)$, e i grafici abbiano tangente verticale in $(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},0)$.

Nel caso le $z(x,y)$ si esplicitano $\begin{array}{l}z_1=\sqrt{1-x^2-y^2-xy}\\ z_2=-\sqrt{1-x^2-y^2-xy}\end{array}$ $\quad x^2+y^2+xy\leq 1$ (N.B. $(\frac{1}{\sqrt3})^2+(\frac{1}{\sqrt3})^2+\frac{1}{\sqrt3}\frac{1}{\sqrt3}=1$)

$\bar{x}=\frac{1}{\sqrt3}$, $\bar{y}=\frac{1}{\sqrt3}-\varepsilon$ sta nel dominio per $0<\varepsilon<1$ $\left(\frac13+\frac13-\frac{2}{\sqrt3}\varepsilon+\varepsilon^2+\frac13-\frac{\varepsilon}{\sqrt3}=1+\varepsilon(\varepsilon-\sqrt3)<1\right)$

$f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}_1)$ ha il segno di $\bar{x}-\bar{y}>0$ $\quad \bar{z}_1=z_1(\bar{x},\bar{y})=\sqrt{(\sqrt3-\varepsilon)\varepsilon}$

$f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}_2)=f(\bar{x},\bar{y},-\bar{z}_1)$ ha segno <0 $\quad \bar{z}_2=z_2(\bar{x}\bar{y})=-\sqrt{(\sqrt3-\varepsilon)\varepsilon}$

$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}_1)$ e $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}_2)$ sono arbitrariamente vicini a $(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},0)$ e stanno sul vincolo: quindi 0 non è valore di massimo o minimo relativo di f su $\{g=1\}$ avendo f come unici punti critici tangenziali per il valore f: $(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},0)$ e $(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},0)$.