Corso di laurea in Ingegneria civile - ambientale - edile
Prova scritta del 14 gennaio 2016

Regole per lo svolgimento

(a) Gli studenti di ingegneria civile 2014-15 (12 crediti) faranno gli esercizi 1, 2, 3.

(b) Gli studenti di ingegneria edile 2014-15 (9 crediti) faranno gli esercizi 1, 2, 4.

(c) Gli studenti col programma di Galatolo-Georgiev faranno gli esercizi 1, 2, 6.

(d) Gli studenti con programmi più vecchi faranno gli esercizi 5, 6, 7.

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y,z) = y + z\ln(1+y) - x^2, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}\times\,]-1,+\infty[\,\times\mathbb{R}.$$

(i) Si mostri che per ogni $(x,z) \in \mathbb{R}^2$ esiste almeno un $y \geq 0$ tale che $f(x,y,z) = 0$, e che tale y è unico allorché $z \geq 0$; in quest'ultimo caso si scriva $y = g(x,z)$, cosicché $f(x,g(x,z),z) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $z \geq 0$.

(ii) Si provi che per $x \in \mathbb{R}$ e $z \geq 0$ la funzione g è non negativa, è decrescente e convessa rispetto a z, ed è tale che $x = 0$ se e solo se $g(x,z) = 0$.

(iii) Si determini il polinomio di Taylor del secondo ordine di g di centro $(2,0)$.

Esercizio 2 Sia Σ la superficie definita dall'equazione cartesiana

$$z = \sin(x+y), \qquad |x| + |y| \leq \pi.$$

(i) Si scriva l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

(ii) Si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma |z|\, d\sigma.$$

Esercizio 3 Si consideri la funzione $f(x) = x^2$, definita per $x \in [-\pi,\pi[$, e la si prolunghi a $\mathbb{R}$ per periodicità.

(i) Si scriva la serie di Fourier di f, quella di f' e quella di f''.

(ii) In quale senso ciascuna delle tre serie converge alla sua somma: in $L^2(-\pi,\pi)$? puntualmente in $[-\pi,\pi]$? uniformemente in $[-\pi,\pi]$?

Esercizio 4 Sia $\{f_n\}$ la successione definita da

$$f_n(x,y) = (1-x^2-y^2)^n, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Descrivere l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \exists f(x,y) := \lim_{n\to\infty} f_n(x,y)\right\}.$$

(ii) Determinare in quali sottoinsiemi $E \subseteq D$ risulta $f_n \to f$ uniformemente in E.

(iii) Stabilire se

$$\lim_{n\to\infty} \int_D |f_n - f| \, dxdy = 0.$$

Esercizio 5 Sia $y_c(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)}{t} + t\,y(t), \qquad t \geq 0, \\ y(1) = c. \end{cases}$$

(i) Si scriva esplicitamente $y_c(t)$.

(ii) Si determini $c \in \mathbb{R}$, se esiste, tale che $y_c(t)$ sia limitata per $t \to +\infty$.

Esercizio 6 Sia Γ la curva descritta, in coordinate polari, dall'equazione

$$r = \vartheta^2, \qquad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,$$

orientata nel verso delle ϑ crescenti.

(i) Si determini la lunghezza di Γ.

(ii) Si calcoli il lavoro compiuto lungo Γ dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Esercizio 7 Si calcoli l'integrale

$$\int_E zx^2 \, dxdydz,$$

ove

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 \leq 2, \; z \geq x^2+y^2\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Fissati x e z, la funzione

$$h(y) = y + z\ln(1+y)$$

è continua, vale 0 per $y=0$ e tende a $+\infty$ quando $y \to +\infty$; pertanto essa assume almeno una volta, per qualche $y \geq 0$, il valore non negativo x^2. Ciò significa che l'equazione $f(x,y,z)=0$ ha almeno una soluzione $y > -1$. Se, in particolare, $z \geq 0$, allora

$$h'(y) = 1 + \frac{z}{1+y} > 0,$$

e quindi la soluzione y è unica.

(ii) Per definizione, $y = g(x,z)$ verifica $f(x, g(x,z), z) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $z \geq 0$; per costruzione g è non negativa, e come abbiamo visto $g = 0$ se e solo se $x = 0$. Inoltre, per il teorema del Dini, g è di classe C^∞, dato che f è di classe C^∞. Derivando l'equazione $g(x,z) + z\ln(1+g(x,z)) - x^2 = 0$, si trova

$$g_z + \ln(1+g) + \frac{z}{1+g}\, g_z = 0,$$

da cui

$$g_z = -\frac{\ln(1+g)}{1+\frac{z}{1+g}} < 0.$$

Derivando ancora,

$$g_{zz} + \frac{2}{1+g}\, g_z - \frac{z}{(1+g)^2}(g_z)^2 + \frac{z}{1+g}\, g_{zz} = 0,$$

da cui

$$g_{zz} = \frac{1}{1+\frac{z}{1+g}}\left(-\frac{2}{1+g}\, g_z + \frac{z}{(1+g)^2}(g_z)^2\right) > 0.$$

(iii) Il polinomio di Taylor cercato è

$$\begin{aligned} P(x,z) &= g(2,0) + g_x(2,0)(x-2) + g_z(2,0)z + \\ &+ \frac{1}{2}g_{xx}(2,0)(x-2)^2 + g_{xz}(2,0)(x-2)z + \frac{1}{2}g_{zz}(2,0)z^2. \end{aligned}$$

È facile verificare che $g(2,0) = 4$. Poiché

$$g_x + \frac{z}{1+g}\, g_x - 2x = 0,$$

si ha $g_x(2,0) = 4$, e dall'espressione di g_z segue $g_z(2,0) = -\ln 5$. Poi, essendo

$$g_{xx} - \frac{z}{(1+g)^2}\,(g_x)^2 + \frac{z}{1+g}\, g_{xx} - 2 = 0,$$

$$g_{xz} + \frac{1}{1+g}\, g_x - \frac{z}{(1+g)^2}\, g_z\, g_x + \frac{z}{1+g}\, g_{xz} = 0,$$

si ricava $g_{xx}(2,0) = 2$, $g_{xz}(2,0) = -\frac{4}{5}$, mentre dall'espressione di g_{zz} si deduce infine $g_{zz}(2,0) = \frac{2\ln 5}{5}$. Pertanto

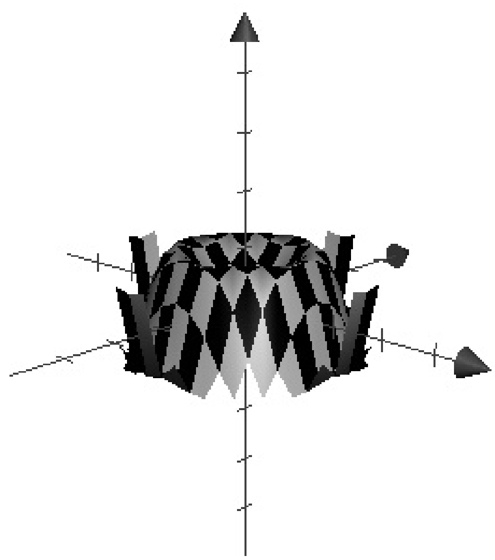
$$P(x,z) = 4 + 4(x-2) - (\ln 5)\, z + (x-2)^2 - \frac{4}{5}\,(x-2)z + \frac{\ln 5}{5}\, z^2.$$

Esercizio 2 (i) Posto $f(x,y) = \sin(x+y)$, si ha $f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; inoltre

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) = \cos(x+y),$$

da cui $f_x\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = f_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; dunque l'equazione del piano tangente al grafico di f in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{\pi}{4}\right).$$



(ii) L'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\boldsymbol{\nabla} f(x,y)|^2}\, dxdy = \sqrt{1 + 2\cos^2(x+y)}\, dxdy,$$

e pertanto, posto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| + |y| \le 1\}$, si ha

$$\int_\Sigma |z|\, d\sigma = \int_E |\sin(x+y)| \sqrt{1 + 2\cos^2(x+y)}\, dxdy.$$

Per calcolare questo integrale conviene cambiare variabili: quando $(x,y) \in E$, le quantità $u = x + y$ e $v = y - x$ si muovono entrambe in $[-\pi, \pi]$. Inoltre

$$\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \forall (x,y) \in E,$$

da cui

$$|J(u,v)| = \left| \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\left|\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{2} \quad \forall (u,v) \in [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi].$$

In definitiva

$$\int_\Sigma |z|\, d\sigma = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin u| \sqrt{1+2\cos^2 u}\, du dv = \pi \int_{-\pi}^{\pi} |\sin u| \sqrt{1+2\cos^2 u}\, du;$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_\Sigma |z|\, d\sigma &= 2\pi \int_0^\pi \sin u \sqrt{1+2\cos^2 u}\, du = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+2s^2}\, ds = \\ &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+2s^2}\, ds = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+t^2}\, dt. \end{aligned}$$

Poiché una primitiva di $\sqrt{1+t^2}$ è $\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})$, si ottiene

$$\int_\Sigma |z|\, d\sigma = 2\sqrt{2}\pi \left[t\sqrt{1+t^2} + \ln(t+\sqrt{1+t^2}) \right]_0^1 = 2\sqrt{2}\pi[\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})].$$

Esercizio 3 (i) Calcoliamo i coefficienti di Fourier di f: dato che essa è una funzione pari, si ha $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, mentre

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \left[x^2 \frac{\sin nx}{n} \right]_0^\pi - \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin nx\, dx = \\ &= 0 + \frac{4}{n\pi} \left[x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi - \frac{4}{n^2\pi} \int_0^\pi \cos nx\, dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+, \end{aligned}$$

mentre $a_0 = \frac{2}{3}\pi^2$.
Poiché $f'(x) = 2x$, per i coefficienti di Fourier a'_n e b'_n di f' si ha $a'_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, mentre, utilizzando il calcolo precedente,

$$b'_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2x \sin nx\, dx = -\frac{2}{n}(-1)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Per la funzione $f''(x\ ) = 2$ si ha evidentemente $a''_0 = 4$ e $a''_n = b''_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.
Le tre serie di Fourier sono: per f

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx,$$

per f'

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n} \sin nx,$$

mentre per f'' la serie si riduce all'unico addendo 2.

(ii) La serie di Fourier di f converge a f nel senso di $L^2(-\pi,\pi)$, perché $f \in L^2(-\pi,\pi)$. Essa inoltre converge puntualmente a f in $[-\pi,\pi]$, in quanto f soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet (è continua ed ha un solo punto di non derivabilità, vale a dire π, ovvero $-\pi$, nel quale però esistono finite le derivate destra e sinistra). Ma in realtà la serie converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-\pi,\pi]$, essendo il suo termine generale infinitesimo di ordine $\frac{1}{n^2}$.
La serie di Fourier di f' converge a f' nel senso di $L^2(-\pi,\pi)$, perché $f' \in L^2(-\pi,\pi)$. Essa inoltre converge puntualmente a f' in $]-\pi,\pi[$ e a 0 in $\pm\pi$, in quanto f soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet (è continua e derivabile salvo che in π, ovvero $-\pi$, ed ha in tale punto limite destro e sinistro finiti ed opposti, nonché derivata destra e sinistra finite). La serie non può convergere uniformemente in $[-\pi,\pi]$ perché le somme parziali della serie sono funzioni continue mentre la somma non lo è.
Le serie di Fourier di f'' è ovviamente convergente in tutti i sensi possibili, visto che è costituita da un solo termine.

Esercizio 4 (i) Affinché $f_n(x,y)$ abbia limite è necessario che sia $|1-x^2-y^2| \le 1$, altrimenti avremmo $|f_n(x,y)| \to \infty$. Si ha, ovviamente,

$$|1-x^2-y^2| \le 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2+y^2 \le 2.$$

È allora facile verificare che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x^2+y^2 < 2 \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ \text{non esiste} * \text{se } x^2 + y62 \ge 2. \end{cases}$$

In particolare,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 2\}.$$

(ii) La convergenza non può essere uniforme in tutto D, perché le f_n sono funzioni continue mentre f non lo è, essendo discontinua nel punto $(0,0)$. Tuttavia la convergenza è uniforme in ogni corona circolare della forma

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \delta \le x^2+y^2 \le 2-\delta\}, \qquad \text{ove } 0 < \delta < 1 :$$

infatti

$$\sup_{(x,y)\in C} |f_n(x,y) - f(x,y)| = \sup_{(x,y)\in C} |1-x^2-y^2|^n \le (1-\delta)^n,$$

e l'ultimo membro tende a 0 per $n \to \infty$.

(iii) In virtù del teorema di convergenza dominata si ha

$$\int_D |f_n - f| dxdy = \int_D |1-x^2-y^2|^n \, dxdy \to 0 \quad \text{per } n \to \infty :$$

infatti, come sappiamo, $|f_n - f| \le 1$ in D, e la funzione costante 1 è sommabile in D, dato che D ha misura finita.

Esercizio 5 (i) L'equazione differenziale si scrive come

$$y' = \frac{1+t^2}{t}\,y,$$

ed è quindi a variabili separabili. Otteniamo successivamente (osservando che $t > 0$, visto che siamo in un intorno di 1):

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{t} + t\right) dt,$$

$$\ln|y(t)| = \ln t + \frac{t^2}{2} + A,$$

$$|y(t)| = e^A\, t\, e^{\frac{t^2}{2}},$$

$$y(t) = K t\, e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = c$ si trova $c = K\sqrt{e}$, da cui finalmente

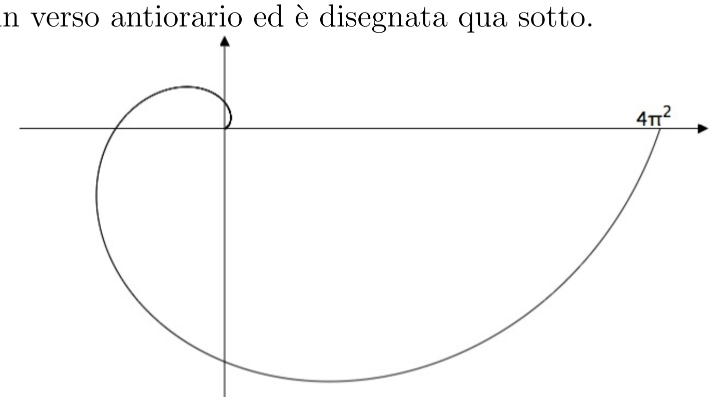
$$y_c(t) = c\, t\, e^{\frac{t^2-1}{2}}.$$

(ii) Se vogliamo che $y_c(t)$ sia limitata per $t \to \infty$, l'unica possibilità è quella di scegliere $c = 0$. Dunque al variare di c l'unica soluzione limitata è $y(t) \equiv 0$.

Esercizio 6 (i) La curva Γ si parametrizza così:

$$x = \vartheta^2 \cos\vartheta, \quad y = \vartheta^2 \sin\vartheta, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

essa è orientata in verso antiorario ed è disegnata qua sotto.



Si ha

$$x' = 2\vartheta\cos\vartheta + \vartheta^2\sin\vartheta, \quad y' = 2\vartheta\sin\vartheta - \vartheta^2\cos\vartheta,$$

e pertanto

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, d\vartheta = \sqrt{4\vartheta^2 + \vartheta^4}\, d\vartheta = \vartheta\sqrt{4+\vartheta^2}\, d\vartheta.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &= \int_0^{2\pi} \vartheta\sqrt{4+\vartheta^2}\, d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi^2} \sqrt{4+t}\, dt = \frac{1}{3}\left[(4+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4\pi^2} = \frac{8}{3}[\sqrt{1+\pi^2} - 1]. \end{aligned}$$

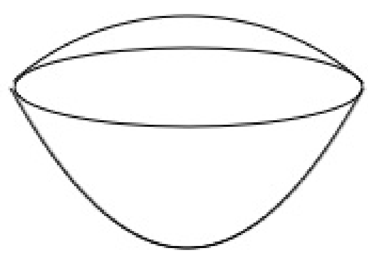
(ii) Dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_{+\Gamma} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy \right).$$

Si ha dunque, ricordando le espressioni di x' e y' già calcolate,

$$\begin{aligned}
&\int_{+\Gamma} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy \right) = \\
&\quad = \int_0^{2\pi} [\sin\vartheta(2\vartheta\cos\vartheta + \vartheta^2\sin\vartheta) - \cos\vartheta(2\vartheta\sin\vartheta - \vartheta^2\cos\vartheta)]\, d\vartheta = \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \vartheta^2\, d\vartheta = \frac{8}{3}\,\pi^3.
\end{aligned}$$

Esercizio 7 L'insieme E è descritto nella figura sottostante.



Utilizzando le coordinate cilindriche

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = z,$$

l'insieme E si descrive come

$$E' = \{(r,\vartheta,z):\ 0 \le \vartheta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ r^2 \le z \le \sqrt{2-r^2}\}.$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}
\int_E zx^2\, dxdydz &= \int_{E'} zr^2\cos^2\vartheta\, r\, drdzd\vartheta = \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\, d\vartheta \int_0^1 r^3 \left[\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z\, dz \right] dr = \\
&= \pi \int_0^1 r^3 \left[\frac{2-r^2-r^4}{2} \right] dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 [2r^3 - r^5 - r^7]\, dr = \frac{\pi}{24}.
\end{aligned}$$